

**Zeitabhängige magnetohydrodynamische Modellrechnungen
für kometare Plasmen**

Michael Schmidt-Voigt

Disbui. München

1988



**Zeitabhängige magnetohydrodynamische Modellrechnungen
für kometare Plasmen**

**Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München**

**vorgelegt von Michael Schmidt-Voigt
aus Eppstein/Ts**

München, den 26. Februar 1988

1. Gutachter: Prof. R. Kippenhahn

2. Gutachter: Prof. R. Kudritzki

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Juli 1988

ZUSAMMENFASSUNG

Wir untersuchen die physikalischen Ursachen der vielfältigen zeitabhängigen Strukturen der Kometenschweife mit Hilfe numerischer magnetohydrodynamischer Modellrechnungen. Bei solchen Simulationen ist im allgemeinen die Divergenzfreiheit des magnetischen Feldes aufgrund numerischer Rundungsfehler nicht gewährleistet. Von diesem Problem ausgehend entwickeln wir ein dreidimensionales, implizites Rechenprogramm, das die Divergenzfreiheit erzwingt. Durch Vergleich mit einer analytischen Ähnlichkeitslösung finden wir, daß die künstlichen magnetischen Monopole die Rechnung dann beeinflussen, wenn die Divergenz relativ zum Magnetfeld multipliziert mit einem mittleren Abstand im numerischen Gitter größer 1% sind; diese relativen Divergenzen wirken sich dann linear auf den Gesamtfehler der Lösung aus. Die stationären Modelle für das kometare Plasma sind in guter Übereinstimmung mit bisherigen Rechnungen. Die in-situ-Messungen an den Kometen Giacobini-Zinner und Halley können durch eine möglichst realistische Beschreibung der Wechselwirkung von Neutralgas und Plasma reproduziert werden. Lediglich im Bereich der Stagnation fallen die Feldstärken zu gering aus, was bei Halley mit einer periodischen Drehung des interplanetaren Magnetfeldes erklärt werden kann. Schließlich untersuchen wir die Auswirkungen tangentialer Diskontinuitäten im interplanetaren Magnetfeld auf die Atmosphäre des Kometen. Im Gegensatz zur derzeit gängigsten Theorie können wir keine Schweifablösungen durch eine Umkehr des Magnetfeldes erklären. Hingegen bildet sich durch die kombinierte Wirkung von ursprünglichem und gedrehtem Feld bei einer 90° Diskontinuität eine Kondensation im Schweif, und zwar bei den Kometen, bei denen das Verhältnis von Bugstoßwellenabstand vom Kern zur Ionisationslängenskala $R_B/R_i < 0.5$ ist. Bei einem heliozentrischen Abstand von einer astronomischen Einheit entspricht das einer kometaren Gasproduktionsrate von $6.5 \cdot 10^{29} \text{ s}^{-1}$. Der gefundene Mechanismus läßt sich, in guter Übereinstimmung mit einer in-situ Messung am Kometen Halley, auf Schweifablösungen anwenden, da die Beobachtung einen fließenden Übergang zwischen Ablösung und Kondensation nahelegt. Auch die Statistik der interplanetaren Magnetfelddiskontinuitäten macht eine 90° -Drehung wahrscheinlicher als eine Feldumkehr. Die bei Kometen beobachteten Bänder konnten - vermutlich aufgrund der Auflösung des numerischen Gitters - nicht reproduziert werden.

3.1.1. Zeitintegration, Linearisierung und Faktorisierung	3-1
3.1.2. Räumliche Differenzierung	3-7
3.2. Numerische Diffusion	3-9
3.3. Numerische magnetische Monopole	3-12
3.4. Ein halbanalytisches Verfahren zur Berechnung des mittleren Molekulargewichts	3-18
3.5. Behandlung der Elektronen als thermisch separate Komponente . .	3-20
3.6. Numerische Gitter	3-20
3.7. IFMAG in orthogonalen, rotationssymmetrischen Koordinaten . . .	3-24
4. TEST DES RECHENPROGRAMMS	4-1
4.1. Ähnlichkeitslösungen der MHD-Gleichungen von B.C. Low	4-1
4.2. Effekte numerischer magnetischer Monopole auf eine gegebene Lösung der MHD-Gleichungen	4-6
5. STATIONÄRE MODELLE FÜR KOMETARE PLASMEN	5-1
5.1. Idealisierte Modelle	5-1
5.1.1. Struktur des kometaren Plasmas	5-3
5.1.2. Abhängigkeit von der Gasproduktion des Kometen	5-15
5.1.3. Vergleich mit anderen Autoren	5-19
5.2. Komet Halley 1986	5-21
5.2.1. Das Modell für den Halleyschen Kometen	5-21
5.2.2. Die Giotto-Trajektorie	5-26
5.2.3. Vergleich mit den Messdaten	5-27
5.2.4. Vergleich mit den Ergebnissen von Schmidt und Wegmann	5-33

5.2.5. Vergleich mit dem idealisierten Modell	5-35
5.3. Komet Giacobini-Zinner 1985	5-36
5.3.1. Das Modell für den Kometen Giacobini-Zinner	5-36
5.3.2. Die Trajektorie	5-39
5.3.3. Vergleich mit der Beobachtung	5-40
6. ZEITABHÄNGIGE MODELLE FÜR KOMETARE PLASMEN	6-1
6.1. 180°-Drehung des Magnetfeldes	6-2
6.2. 90°-Drehung des Magnetfeldes	6-6
6.2.1. Bänder	6-6
6.2.2. Schweif-Kondensationen	6-12
6.2.2.1. Die Modellrechnung	6-12
6.2.2.2. Mechanismen zur Bildung der Schweif-Kondensation	6-14
6.2.2.3. Abhängigkeit der Bildung von Schweif-Kondensationen von der Gasproduktion des Kometen	6-22
6.3. Periodische Drehung des Magnetfeldes	6-31
6.4. Plötzliche Änderung der kometa ren Gasproduktion	6-34
7. ZUSAMMENFASSUNG UND DISKUSSION	7-1
8. LITERATUR	8-1
Anhang A. Abstand der Bugstoßwelle vom Kometenkern	A-1
Anhang B. Neutralgasmodell für den Halleyschen Kometen	B-1
Anhang C. Jacobi-Matrizen für das IFMAG-Schema	C-1
Anhang D. Der Thomas-Algorithmus	D-1
9. Lebenslauf	9-1

1. EINLEITUNG

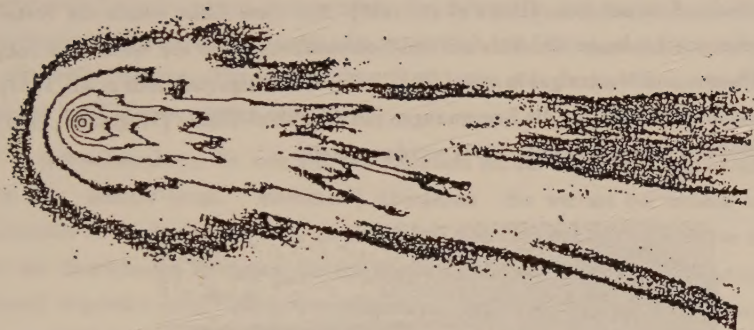


Abb. 1.1: Der Komet Morehouse 1908, dessen Schweif durch ausgeprägte "Bänder" charakterisiert wird. Aus Högner und Richter (1969).

Die Erforschung der ausgedehnten Plasmaschweife der Kometen begann mit der Entdeckung Ludwig Biermanns (1951), daß die Wechselwirkung von Ionen kometaren Ursprungs mit dem Plasma des Sonnenwindes für die Schweifbildung verantwortlich ist. Biermann, Brosowski und Schmidt (1967) leisteten mit ihren numerischen hydrodynamischen Rechnungen auch in quantitativer Hinsicht die Pionierarbeit auf dem Gebiet der Wechselwirkung von Kometen mit dem Sonnenwind. Dieses Modell wurde in den folgenden zwei Jahrzehnten verfeinert, wobei die Möglichkeiten moderner Großrechenanlagen in vollem Umfange genutzt wurden. Aus den Arbeiten von Brosowski und Wegmann (1973) wurden dann schließlich die zwei- und dreidimensionalen stationären Rechnungen von Schmidt und Wegmann (1980, 1982).

Am 11. September 1985 und am 13./14. März 1986 erreichten die Raumsonden ICE und Giotto die Kometen Giacobini-Zinner und Halley und führten umfangreiche Messungen des Plasmazustandes durch. Der Halleysche Komet wurde auch von den sowjetischen und japanischen Sonden Vega 1 und 2, Sagigake und Suisei untersucht. Diese ersten in-situ-Messungen waren eine gewaltige Herausforderung an die Theorie, da erstmals geprüft werden konnte, wie realistisch die Modelle waren. Die wesentlichen Theorien, wie die Existenz von Kometenkern, Magnetopause und Bugstoßwelle durch die Wechselwirkung von Komet und Sonnenwind,

wurden bestätigt. Als Folge dieser Missionen verbesserten auch Schmidt und Wegmann ihr Modell, indem sie es mit der chemischen Entwicklung des Neutralgases von Huebner verknüpften (Boice et al., 1986). Auf diese Weise wurde die Verteilung der verschiedenen Moleküle um den Kometenkern, sowie die Wechselwirkung von Plasma und Neutralgas in vielen Details berücksichtigt (Schmidt et al., 1987). Präzise Simulationen für die Begegnungen mit Giacobini-Zinner (Wegmann, 1987) und Halley (Wegmann et al., 1987) wurden erstellt.

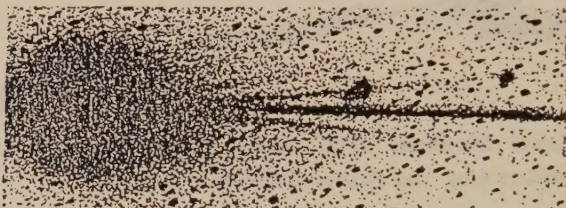


Abb. 1.2: Photographie des Kometen Kabayashi-Berger-Milon 1975 mit Schweifstrahlen und Schweifkondensation. Aus Mendis und Houpis (1982).

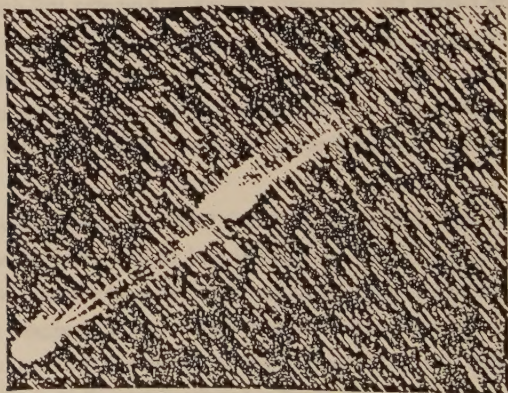


Abb. 1.3: Photographie einer Schweifablösung beim Kometen Morehouse 1908. Aus Swamy (1986).

Die bisher genannten Simulationen sind stationär. Die Beobachtung zeigt aber, daß Kometen die Annahme der Stationarität nur im Großen erfüllen. Bei genauerer Betrachtung ist insbesondere der Schweif in hohem Maße von zeit-abhängigen Strukturen durchsetzt, die vermutlich auf Störungen im Sonnenwind zurückzuführen sind. Die wesentlichen Strukturen, mit denen wir uns in dieser Arbeit beschäftigen werden, sind:

- Schweifstrahlen, die sich um den Kometen herum falten und schließlich in die sog. Bänder (engl. "streamer") übergehen. Sie werden bei nahezu allen Kometen beobachtet (Bild 1.1). Die "haarige" Struktur der Schweife führte auch zu der Bezeichnung Kometen, die aus dem griechischen "kometes" (langhaariger Stern) abgeleitet wird. Bänder lassen sich vermutlich durch Diskontinuitäten im Magnetfeld des solaren Windes erklären, worauf wir später noch zurückkommen.

- Schweifkondensationen sind wolkenartige Strukturen, die den Kometenschweif durchlaufen (Bild 1.2). Sie haben typische Geschwindigkeiten von 20 bis 100 km s^{-1} . Man kann sie vielleicht als schwache Form von

- Schweifablösungen oder Diskonnexionen ansehen. Dabei wird der gesamte Schweif des Kometen abgetrennt und anschließend wieder neu gebildet (Bild 1.3). Niedner und Brandt (1978) erklären diese Ereignisse durch eine Umkehr des Magnetfeldes im Sonnenwind, was wir später ausführlich diskutieren werden. Der Übergang zwischen Kondensationen und Schweifablösungen ist durchaus fließend (Brandt, 1982). Als Beispiel sei der Komet Humason 1961 genannt, bei dem ein Ereignis beobachtet wurde (siehe z.B. Fernández und Jockers, 1983), das man entweder als große Kondensation oder als Schweifablösung ansehen kann.

Die physikalischen Ursachen dieser Phänomene sind weitgehend ungeklärt und neben magnetischen Störungen im Sonnenwind werden auch Änderungen in Richtung und Betrag der Sonnenwindgeschwindigkeit und/oder Dichte vorgeschlagen (siehe auch Jockers, 1982). Eine detaillierte phänomenologische Studie des Kometen Kohoutek mit Interpretationsansätzen findet man bei Jockers (1985). Im Rahmen dieser Arbeit werden wir uns nur mit solchen Ereignissen beschäftigen, die vermutlich auf magnetische Störungen des interplanetaren Feldes zurückzuführen sind. Wir werden versuchen, die beobachteten Schweifstrukturen durch numerische Simulationen zu reproduzieren. Dabei werden wir voraussetzen, daß die

Wechselwirkung von Sonnenwind und Komet mit den Gesetzen der Magnetohydrodynamik (MHD) beschrieben werden kann. Zeitabhängige dreidimensionale numerische Untersuchungen über die Wechselwirkung von Sonnenwind und Komet wurden bereits von Fedder et al. (1983) durchgeführt, sie sind aber bis dato noch nicht erschienen. Die Autoren verbinden dort einige der simulierten Strukturen mit beobachteten Phänomenen im Schweif. Sie zeigen aber leider keine Säulendichten der kometaren Ionen, die man mit beobachteten Isophotenkarten vergleichen könnte. Mit Hilfe von zweidimensionalen Modellen konnten Ogino et al. (1986) magnetische Rekonnexion als Ursache für Diskonnexion simulieren; die Autoren räumen jedoch ein, daß bei einer dreidimensionalen Rechnung Rekonnexion nicht notwendigerweise auftreten muss.

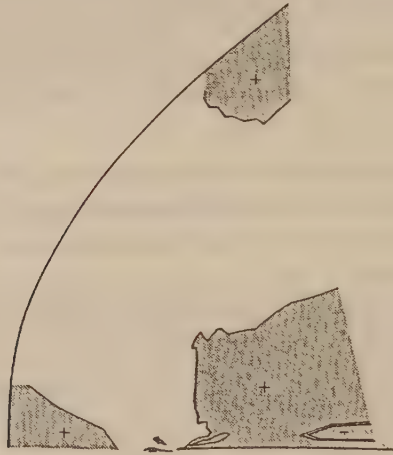


Abb. 1.4: Darstellung der Größe $\Upsilon = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) / (|\partial_x B_x| + |\partial_y B_y| + |\partial_z B_z|)$ in einer Kometensimulation von Schmidt und Wegmann (1980). In dem schraffierten Bereich ist $\Upsilon > 10\%$.

Jede numerische magnetohydrodynamische Simulation hat mit einem Problem zu kämpfen, auf das Schmidt und Wegmann (1982) bei ihren Kometensimulationen aufmerksam machten, das aber bei allen magnetohydrodynamischen Rechnungen gegenwärtig ist. Es handelt sich um künstliche numerische Divergenzen des

Magnetfeldes, die durch Rundungsfehler im Verlauf der Rechnung immer stärker werden. In dem Bild 1.4 ist die Magnetfelddivergenz dividiert durch die Summe der Beträge der Gradienten in die drei Raumrichtungen in einer Kometensimulation aus Schmidt und Wegmann (1982) dargestellt. In dem schraffierten Bereich sind die relativen Divergenzen $> 10\%$ und durchaus nicht zu vernachlässigen. Die Frage, welchen Einfluß diese "künstlichen magnetischen Monopole" auf die übrigen physikalischen Größen des Plasmas haben, bleibt offen. Wir streben daher für unsere Kometenmodelle ein numerisches Verfahren an, das die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes garantiert. Dieses wollen wir dann verwenden, um die Auswirkungen der künstlichen Monopole auf die Rechnung zu untersuchen. Der erste Teil der Arbeit wird daher der Entwicklung dieses dreidimensionalen, impliziten und zeitabhängigen Differenzschemas gewidmet.

Wir werden im zweiten Kapitel die physikalischen Grundlagen des Kometenmodells und die Berechtigung der Annahme der MHD diskutieren. Die verwendeten physikalischen Gesetze werden quantitativ formuliert werden. Im dritten Kapitel werden wir diese Gesetze diskretisieren und das Differenzschema entwickeln. Von dessen Funktionstüchtigkeit überzeugen wir uns dann im vierten Kapitel, wo wir auch den Einfluß der magnetischen Monopole auf eine gegebene Lösung der MHD Gleichungen ausführlich diskutieren.

Der zweite Teil der Arbeit dient der Anwendung des Differenzschemas auf Kometen. Im fünften Kapitel werden wir stationäre Modelle vorstellen, die nicht an der Krankheit der künstlichen Monopole leiden. Mit deren Hilfe werden wir die Eigenschaften des kometaren Plasmas diskutieren und unsere Ergebnisse mit anderen Autoren vergleichen. Von besonderer Wichtigkeit sind natürlich die Modelle für die Begegnungen der Sonden ICE und Giotto mit den Kometen Giacobini-Zinner 1985 und Halley 1986. Der Vergleich mit den Messungen wird ein gnadenloser Test unseres Modells sein. Im sechsten Kapitel werden wir dann endlich die Annahme der Stationarität aufgeben und die Reaktion des Kometen auf magnetische Störungen im Sonnenwind untersuchen. Wir werden dabei das IMF umkehren, um Schweifablösungen nach Niedner und Brandt (1978) zu simulieren, und um 90° drehen, um Bänder nach Schmidt und Wegmann (1982) zu reproduzieren. Schließlich wollen wir das Feld periodisch drehen, und die Gasproduktionsrate des Kometen instantan ändern, wobei letzteres ein numerisches Experiment von mehr



akademischem Charakter sein wird. Im letzten Kapitel werden wir unsere Ergebnisse zusammenfassen und unter den beobachteten Kometen nach Kandidaten für unsere simulierten Schweifstrukturen suchen.

2. DAS PHYSIKALISCHE MODELL

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Eigenschaften unseres Kometenmodells diskutiert und die physikalischen Gesetze quantitativ formuliert werden. Schließlich wird die Wechselwirkung von Plasma und Neutralgas kometaren Ursprungs behandelt, deren Berücksichtigung bei den Simulationen der Missionen zum Kometen Halley (März 1986) und Giacobini-Zinner (September 1985) von entscheidender Bedeutung ist.

2.1. WECHSELWIRKUNG VON KOMET UND SONNENWIND

Unseren heutigen Vorstellungen zu Folge entstammen die Kometen einer unser Sonnensystem umgebenden, bis zu 50000 AE ausgedehnten Ansammlung von Kometenkernen, der sog. "Oortschen Kometenwolke" (Oort, 1950). Sie enthält ungefähr 10^{12} Kometen (Weissman, 1982), die gelegentlich durch gravitative Wechselwirkung mit vorbeifliegenden Sternen in die inneren Bereiche des Sonnensystems abgelenkt werden. Die Abmessungen dieser Kerne liegen in der Größenordnung einiger Kilometer. Nach Whipple (1950) bestehen sie zum größten Teil aus Wassereis, das durch andere Moleküle (z.B. CO , CO_2 , CH_4) und Staub verunreinigt ist. Daher wurde auch die Bezeichnung "dirty ice" eingeführt.

Nähert sich ein Kometenkern der Sonne bis auf Abstände von weniger als ungefähr $3AE$ ($\simeq 450 \cdot 10^6 km$), so verdampfen die Moleküle an seiner Oberfläche und können ungehindert abströmen, da Gravitationskräfte wegen der geringen Masse von bis zu etwa $5 \cdot 10^{-12}$ Erdmassen zu vernachlässigen sind. Auch Stöße mit Teilchen aus dem Sonnenwind sind aufgrund der geringen Dichten unbedeutend. Da aber die Zeitskalen für Photoionisation durch die solare UV-Strahlung in einem Abstand von etwa 1 AE im Bereich von $10^6 s$ liegen, werden die kometaren Moleküle ionisiert. Sie gyrieren dann um die Feldlinien des interplanetaren Magnetfeldes und werden auf diese Weise vom Sonnenwind mitgenommen, den sie wegen ihrer großen Masse ($\simeq 20 m_p$) abbremsen. Dabei wird die kinetische Energie des Sonnenwindes in thermische Energie der Kometenatmosphäre verwandelt; die Ionentemperaturen in der äußeren Koma liegen bei $10^6 K$. Biermann et al. (1967) und Wegmann (1987) konnten mit einem einfachen eindimensionalen Modell zeigen, daß die Überschallströmung des solaren Windes nur solange aufrechterhalten werden kann, wie das relative mittlere Molekulargewicht des ange-

reicherten Sonnenwindes kleiner als $\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1} \mu_{\odot}$ ist, wobei γ den Adiabatenindex und $\mu_{\odot}$ das mittlere Molekulargewicht des Sonnenwindes darstellt. Spätestens wenn das Molekulargewicht größer als der angegebene Wert wird, werden die parallelen Stromlinien durch eine Stoßfront, die sog. Bugstoßwelle, aufgefächert und können die innere Koma des Kometen umströmen.

Um den Abstand R_B der Bugstoßwelle vom Kometenkern für den planparallelen Stoß abzuschätzen, lösen wir die Kontinuitätsgleichung mit der Massenquelle $\dot{\rho}_c$ für kometare Ionen und berücksichtigen, daß der Massenfluß an der Stoßfront zu $\frac{1}{\gamma^2-1}$ von den Ionen getragen wird (Schmidt und Wegmann, 1982):

$$\frac{\rho_{\odot} v_{\odot}}{\gamma^2 - 1} = \int_{R_B}^{\infty} \dot{\rho}_c(r) dr. \quad (2.1)$$

Hierin sind $\rho_{\odot}$ und $v_{\odot}$ Dichte und Geschwindigkeit des solaren Windes. Zur Berechnung der Massenquelle $\dot{\rho}_c$ der Ionen nehmen wir einen kugelsymmetrischen und stationären Ausstrom des Neutralgases mit Geschwindigkeit v_c an (Haser, 1957). Es werde mit einer Rate σ ionisiert. Die Massenerhaltung für das Neutralgas lautet dann:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_c \vec{v}_c) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_c v_c) = -\sigma \rho_c, \quad (2.2)$$

woraus bei Abständen, die größer als einige Radien des Kometenkerns sind,

$$\dot{\rho}_c(r) = \sigma \rho_c(r) = \frac{G \sigma m_c}{4\pi r^2 v_c} e^{-\frac{r}{v_c}} \quad (2.3)$$

folgt. G ist die Gasproduktionsrate an der Oberfläche und m_c die Masse der Moleküle. Setzen wir Gl. (2.3) in Gl. (2.1), so folgt eine Integralgleichung für R_B :

$$\frac{\rho_{\odot} v_{\odot}}{\gamma^2 - 1} = \frac{G \sigma^2 m_c}{4\pi v_c^2} \int_{R_B \sigma / v_c}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi^2} d\xi, \quad (2.4)$$

die für $R_B \ll \frac{v_c}{\sigma}$ (Kometen mit kleiner Gasproduktionsrate) die Näherungslösung

$$R_B \simeq \frac{G m_c \sigma (\gamma^2 - 1)}{4\pi v_c \rho_{\odot} v_{\odot}} \quad (2.5)$$

hat (Schmidt und Wegmann, 1982). Typische Parameter für Kometen in einer Entfernung von 1 AE von der Sonne sind: $G = 10^{28} \dots 10^{31} \text{ s}^{-1}$, $m_c = 20 m_p$, $\sigma =$

10^{-6} s^{-1} , $v_c = 1 \text{ km s}^{-1}$, $\rho_\odot = 5 m_p \text{ cm}^{-3}$, $v_\odot = 400 \text{ km s}^{-1}$, $\gamma = 2$. Mit diesen Parametern variiert R_B von $2.2 \cdot 10^4$ bis $1.6 \cdot 10^6 \text{ km}$. Kometen, bei denen die Bugstoßwelle als Funktion von G durch die lineare Relation Gl. (2.5) approximiert werden kann, wollen wir in Zukunft als "lineare Kometen" bezeichnen. Wird R_B vergleichbar mit der Ionisationslänge, so nimmt R_B nicht mehr linear mit G zu und wir bezeichnen die Objekte dann als "nichtlineare Kometen".

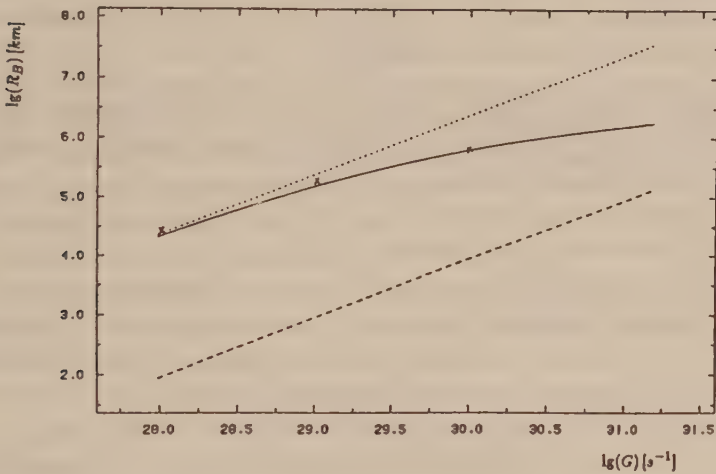


Abb. 2.1: Darstellung des Abstands der Bugstoßwelle vom Kometenkern als Funktion der Gasproduktionsrate. Durchgezogen ist die Lösung der Gl. 2.4, gepunktet die Näherung Gl. 2.5 für lineare Kometen, gestrichelt ist der Abstand der Kontaktdiskontinuität. Kreuze zeigen den Abstand der Bugstoßwelle vom Kometenkern aus drei numerischen Modellen.

R_B als Funktion von G ist in dem Bild 2.1 dargestellt, eine Tabelle finden wir im Anhang A. Ganz grob können wir lineare Kometen durch $G \lesssim 10^{29} \text{ s}^{-1}$ und nichtlineare durch $G \gtrsim 10^{29} \text{ s}^{-1}$ definieren. Die Unterteilung in lineare und nichtlineare Kometen wird uns insbesondere beim Verständnis der zeitabhängigen Effekte helfen.

Hinter der Bugstoßwelle wird der Sonnenwind immer langsamer, bis er

schließlich dem dynamischen Druck der kometaren Ionen nicht mehr entgegenwirken kann und stagniert: Eine Kontaktdiskontinuität trennt hier reines kometares von mit dem Sonnenwind gemischtem Plasma. Aus der Gleichheit der dynamischen Drücke von kometaren Ionen und Sonnenwind lässt sich der Abstand der Kontaktdiskontinuität R_c vom Kometenkern abschätzen, wenn man berücksichtigt daß $\frac{\sigma}{v_c} R_c \ll 1$ ist (Schmidt und Wegmann, 1982):

$$R_c = \frac{G \sigma m_c}{4\pi \rho_\odot v_\odot^2}. \quad (2.6)$$

Für lineare Kometen ist $R_B/R_c \simeq v_\odot/v_c \simeq 400$: Zwischen Bugstoßwelle und Kontaktdiskontinuität liegen zwei bis drei Größenordnungen in der Längenskala.

Da der Stagnationsdruck der kometaren Ionen einerseits durch chemische Prozesse wie Photodissoziation (Huebner et al., 1982), elastische Stöße oder kinetische Energie der Photoelektronen vergrößert wird, andererseits R_c aber durch magnetischen Zug auch wieder kleiner wird, ist Gl. (2.6) nur eine grobe Abschätzung für R_c . Beim Kometen Halley würde man nach Gl. (2.6) mit $G = 6.9 \cdot 10^{29} \text{ s}^{-1}$, $m_c = 20 m_p$, $\sigma = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $\rho_\odot = 7 m_p \text{ cm}^{-3}$ und $v_\odot = 380 \text{ km s}^{-1}$ einen Abstand $R_c \simeq 1000 \text{ km}$ gegenüber den von der Sonde Giotto gemessenen 4600 km s^{-1} (Krankowsky et al., 1986) erwarten. In dem Bild 2.1 ist R_c nach Gl. (2.6) eingezeichnet, wobei mit einem Faktor 4.6 multipliziert wurde, um an die Halley-Messungen anzugleichen.

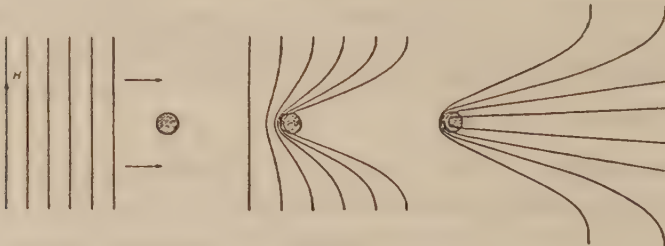


Abb. 2.2: Das solare Magnetfeld umhüllt den Kern des Kometen und bildet im Schweif zwei Gebiete unterschiedlicher Polarität. Nach Alfvén (1957).

Bei den bisherigen Ausführungen haben wir das solare Magnetfeld vernachlässigt. Wir wollen es zunächst idealisiert als senkrecht zur Strömungsrichtung des Sonnenwindes betrachten. Wegen der $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ Bedingung muß die Normalkomponente des Feldes die Bugstoßwelle stetig durchsetzen, während die Tangentialkomponente komprimiert wird. Im Rahmen der idealen MHD sind die Feldlinien an die Materie gebunden ("eingefroren"): Sie folgen den Stromlinien und werden um den Kern des Kometen herumgewickelt. Es bilden sich zwei Gebiete entgegengesetzter Polarität im Schweif aus (Bild 2.2). Je stärker der Sonnenwind abgebremst wird, umso stärker werden die Feldlinien komprimiert, am stärksten im Bereich der Stagnation. Zur Abschätzung der Größenordnung des Feldes nehmen wir etwas willkürlich an, daß die gesamte kinetische Energie des Sonnenwindes zu gleichen Teilen in thermische und magnetische Energie umgewandelt werde. Dann gilt

$$\frac{\vec{B}^2}{8\pi} \simeq \frac{1}{4} \rho_{\odot} v_{\odot}^2, \quad (2.7)$$

da im Sonnenwind thermische und magnetische Energie gegen die kinetische Energie zu vernachlässigen sind und im Stagnationsbereich $v = 0$ ist. Die Gl. (2.7) enthält keine Parameter der kometaren Ionen. Die Magnetfeldkompression wird also allein durch die Sonnenwindparameter bestimmt. Mit $\rho_{\odot} \simeq 5 m_p \text{ cm}^{-3}$ und $v_{\odot} \simeq 400 \text{ km s}^{-1}$ erwarten wir Feldstärken um 30 nT . Die tatsächlichen Feldstärken sind etwas höher als in unserer Abschätzung.

Innerhalb der Kontaktdiskontinuität verschwindet das Magnetfeld, da dessen Normalkomponente auf der Kontaktfläche Null ist und diese stetig durchsetzen muß. Dieser Bereich wird als Magnetopause bezeichnet.

Im bisherigen haben wir die Kometen durchweg als stationär betrachtet, was verglichen mit den Beobachtungen eine nur sehr grobe Näherung ist. Insbesondere im Schweif des Kometen beobachtet man eine Vielzahl von zeitabhängigen Phänomenen, die im wesentlichen durch Störungen im stationären Sonnenwind verursacht werden müssen. Zwar kommen auch Variationen der kometaren Gasproduktion in Betracht, wegen der im Vergleich zum Sonnenwind geringen Geschwindigkeit können diese sich aber nur allmählich der Koma mitteilen, so daß schnelle oder kleinskalige Phänomene dadurch nicht erklärt werden können. Zeitabhängige Phänomene werden wir im Kapitel 6 noch eingehend studieren.

2.2. DIE IDEALE MHD-NÄHERUNG

Zwei grundlegende Annahmen definieren die ideale MHD-Näherung, mit deren Hilfe wir unser Modell konstruieren wollen:

1.) Die Zeitskalen für Stöße zwischen den Teilchen bzw. Gyration sind klein gegen die hydrodynamischen Zeitskalen des Systems; das System ist im lokal thermodynamischen Gleichgewicht.

2.) Die elektrische Leitfähigkeit des Plasmas ist so hoch, daß die Diffusion der Feldlinien innerhalb der hydrodynamischen Zeitskalen zu vernachlässigen ist.

Die hydrodynamischen Zeitskalen variieren je nach Produktionsrate G des Kometen ($10^{28} \dots 10^{31} \text{ s}^{-1}$) von einigen 100 s bis zu einigen Stunden, was wir mit Hilfe der Geschwindigkeiten und Dimensionen der Kometen bei Schmidt und Wegmann (1982) abschätzen können. Während die Stoßzeiten im äußeren Bereich des Kometen um 10^6 s liegen, betragen die Gyrationzeiten nur etwa 10 s: Wenigstens senkrecht zum Magnetfeld scheint also die Annahme einer gemeinsamen Geschwindigkeit aller geladener Teilchen gerechtfertigt zu sein. Parallel zum Feld sind die Zeitskalen der Zweistrominstabilität maßgebend. Die in-situ Messungen am Kometen Giacobini-Zinner 1985 (Richardson et al., 1986) zeigen zwar, daß Ionen- und Elektronengeschwindigkeiten nicht vollständig übereinstimmen, die Differenzen sind aber gering und unsere Annahme scheint daher keine allzu starke Idealisierung der Realität zu sein. Berücksicht man außerdem, daß dieser Komet eine relativ geringe Produktionsrate von $G = 4.5 \cdot 10^{28} \text{ s}^{-1}$ hat, so wird die Näherung bei größeren Kometen mit längeren hydrodynamischen Zeitskalen eher besser werden. Bei Halley wurden im wesentlichen identische Geschwindigkeiten für Protonen und kometare Ionen gemessen (Gringauz et al., 1986).

Problematischer als die Annahme einer gemeinsamen Bewegung der geladenen Plasmakomponenten ist die einer gemeinsamen Temperatur, da die Energierelaxation zwischen den Ionen und den Elektronen viel langsamer ist als die Impulsrelaxation. Während sich die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung für Elektronen bzw. Ionen getrennt in etwa 100 s bzw. 2000 s einstellt, benötigen Elektronen und Ionen etwa 10^8 s zur Ausbildung einer gemeinsamen Geschwindigkeitsverteilung (Hübner, 1982, S.154), was erheblich über den hydrodynamischen Skalen liegt. Wir werden daher Elektronen und Ionen getrennt als Maxwell-verteilt betrach-

ten. In einem idealisierten Modell werden die Elektronen als kalte Komponente, die keinen Einfluß auf die magnetohydrodynamischen Eigenschaften des Plasmas haben soll, behandelt. Ein realistischeres Modell, wie es zur Simulation der Begegnungen mit den Kometen Halley und Giacobini-Zinner notwendig ist, wird dann Elektronen und Ionen als thermisch getrennte Komponenten des sich mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit bewegendem Plasmas betrachten.

Die Annahme einer vernachlässigbaren Diffusion der Magnetfeldlinien ist wesentlich unproblematischer. Das Verhältnis von magnetischer Diffusions- zu hydrodynamischer Zeitskala wird durch die magnetische Reynoldszahl

$$R_M = \frac{4\pi v l \lambda}{c^2}$$

beschrieben. v ist eine typische Geschwindigkeit, l die Längenskala des Systems, c die Lichtgeschwindigkeit und λ die elektrische Leitfähigkeit. Mit der Spitzerschen Leitfähigkeit für vollionisierte Plasmen (Hübner, 1982) bei einer Temperatur $T = 10^5 K$ und Dichte $n = 10^2 cm^{-3}$ ist $\lambda = 10^{14} (\Omega cm)^{-1}$. Nehmen wir $l = R_B$ und $v = 10^2 km s^{-1}$ als für kometare Plasmen typische Werte, so folgt $R_M \simeq 1.4 \cdot 10^6 R_B [km]$. Es ist also immer $R_M \gg 1$, und daher die Annahme unendlicher Leitfähigkeit in der idealen MHD gerechtfertigt.

Zur mathematischen Beschreibung des kometaren Plasmas benutzen wir die durch Quellterme ergänzten Erhaltungssätze der MHD. Diese schreiben wir für ein Plasma der Dichte ρ , der Impulsdichte $\vec{q} = \rho \vec{v}$, der Energiedichte $\epsilon = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{\vec{B}^2}{8\pi}$ mit Magnetfeld $\vec{B}$ am Ort $\vec{x}$ zur Zeit t :

2.2.1. ERHALTUNG DER MASSE

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \dot{\rho}_c. \quad (2.8)$$

$\dot{\rho}_c$ ist die Massenquelle kometarer Ionen, als einfaches Beispiel haben wir das Modell von Haser (1957) in Gl. (2.3) kennengelernt. Die detaillierte Beschreibung der Quellterme erfolgt im nächsten Abschnitt.

2.2.2. ERHALTUNG DER TEILCHENZAHL

Da bei Kometen das mittlere Molekulargewicht innerhalb der Atmosphäre variiert, müssen wir zur Bestimmung der Teilchenzahldichte die Kontinuitätsgleichung für die Teilchenzahlerhaltung lösen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{v}) = \dot{n}_c . \quad (2.9)$$

2.2.3. ERHALTUNG DES IMPULSES

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\underline{P} + \underline{M}) = \dot{\vec{q}}_c . \quad (2.10)$$

$\underline{P}$ ist der Tensor der Impulsstromdichte, der mit dem Drucktensor einer idealen Flüssigkeit durch

$$P_{i,k} = \rho v_i v_k + p \delta_{i,k} \quad (2.11)$$

zusammenhängt. $\underline{M}$ ist der magnetische Anteil des Maxwell'schen Spannungstensors:

$$M_{i,k} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \vec{B}^2 \delta_{i,k} - B_i B_k \right) . \quad (2.12)$$

Elektrische Kräfte sind von der Ordnung $\frac{v^2}{c^2}$ und können im Rahmen der nicht-relativistischen MHD vernachlässigt werden. $\dot{\vec{q}}_c$ ist die Impulsquelle kometarer Ionen.

2.2.4. ERHALTUNG DER ENERGIE

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left((\epsilon + p_g) \vec{v} - \frac{1}{4\pi} (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right) = \dot{\epsilon}_c . \quad (2.13)$$

p_g ist der Gesamtdruck des Plasmas:

$$p_g = p + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} \quad (2.14)$$

$\dot{\epsilon}_c$ sind beliebige Energiequellen.

2.2.5. ERHALTUNG DES MAGNETISCHEN FLUSSES

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - [\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underline{T} = 0. \quad (2.15)$$

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 0 & v_2 B_1 - v_1 B_2 & v_3 B_1 - v_1 B_3 \\ v_1 B_2 - v_2 B_1 & 0 & v_3 B_2 - v_2 B_3 \\ v_1 B_3 - v_3 B_1 & v_2 B_3 - v_3 B_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \underline{T})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{i,j}$$

2.2.6. ELEKTRONENENERGIE

Bei der Behandlung der Elektronen als Einzelkomponente ist es zweckmäßig die Gleichung für die innere Energie (Elektronendruck) zu verwenden, da bei deren Ableitung die Wechselwirkung von Elektronen und Magnetfeld explizit herausfällt und nur implizit über das Geschwindigkeitsfeld eingeht (Jancel und Kahan, 1966, S.291): Die magnetischen Anteile werden jeweils mit der mittleren thermischen Geschwindigkeit ($=0$) multipliziert, wodurch formal kein Unterschied zum feldfreien Plasma besteht. Mit der Elektronenenergiedichte ϵ_e und dem Elektronendruck $p_e = (\gamma - 1)\epsilon_e$ gilt:

$$\frac{\partial \epsilon_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_e \vec{v}) + p_e (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \dot{\epsilon}_e \quad (2.16)$$

oder

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (p_e \vec{v}) = (\gamma - 1)[\dot{\epsilon}_e - p_e (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})] \quad (2.17)$$

Die Elektronenenergie ist bis auf die Kompressionsarbeit $p_e(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ und den Energieaustausch $\dot{\epsilon}_e$, der im nächsten Abschnitt genauer behandelt werden soll, eine Erhaltungsgröße.

2.2.7. ZUSTANDSGLEICHUNG

Durch die Bestimmung von ρ , n , ϵ , p_e , $\vec{v}$ und $\vec{B}$ aus den Erhaltungssätzen ist der Zustand des Plasmas am Orte $\vec{x}$ zur Zeit t vollständig bestimmt. Um den Druck aus der Gesamtenergie zu berechnen, verwenden wir die Zustandsgleichung des idealen Gases. Dazu müssen wir den Adiabatenindex γ festlegen. Unter der Annahme, daß die Teilchen praktisch stoßfrei um die Magnetfeldlinien gyrieren, tragen nur die beiden Freiheitsgrade der Gyration zur spezifischen Wärme bei. Wir setzen daher $\gamma = 2$. Fast alle hydrodynamischen Rechnungen verwenden diesen Wert. Die jüngsten in-situ Messungen am Halleyschen Kometen (Neugebauer et al., 1986, 1987 und Mukai et al., 1986) zeigen aber, daß die Ionen durch Instabilitäten (sog. "Pitch-Winkel-Streuung") bereits vor der Bugstoßwelle in guter Näherung eine Kugelschale im Geschwindigkeitsraum füllen, im Gegensatz zu den Tori der reinen Gyrationbewegung. Die Instabilitäten führen daher zu einer Isotropisierung der kometaren Ionen (siehe auch Galeev et al., 1985). Obwohl die Kugelschalen im Geschwindigkeitsraum nicht homogen gefüllt werden, können wir aber davon ausgehen, daß die Annahme von $\gamma = 5/3$ für drei Freiheitsgrade wenigstens hinter der Bugstoßwelle zu bevorzugen ist. Dieses neuere Ergebnis haben wir bei den Simulationen der Kometen Giacobini-Zinner und Halley bereits berücksichtigt. Bei den übrigen Modellen nehmen wir $\gamma = 2$ an.

2.3. WECHSELWIRKUNG MIT DEM NEUTRALGAS

Wir wollen nun die Wechselwirkung von Plasma und Neutralgas detailliert beschreiben. Soweit nicht anders vermerkt, entstammen die in diesem Abschnitt aufgeführten Quellterme der Arbeit von Schmidt et al. (1987). Dieses Modell soll dann später verwendet werden, um einen möglichst realistischen Vergleich mit den Messungen der Sonden GIOTTO und ICE an den Kometen Halley 1986 und Giacobini-Zinner 1985 zu ermöglichen. Bei den übrigen Modellen, insbesondere den zeitabhängigen, werden wir nur die Ionenquelle des Haser-Modells Gl. (2.3) bei konstanter Ionisationsrate σ verwenden, woraus $\dot{n}_c = \frac{\dot{\rho}_c}{m_c}$, $\dot{q}_c = \dot{\rho}_c \vec{v}_c$ und $\dot{\epsilon}_c = \frac{1}{2} \dot{\rho}_c \vec{v}_c^2$ folgt. Um die Bedeutung der einzelnen Quellterme zu ergründen, schreiben wir die stationären Erhaltungsgleichungen in dimensionslosen Variablen $\rho^* = \rho/\rho_\odot$,

$$n^* = n/n_{\odot}, \quad \vec{q}^* = \vec{q}/(\rho_{\odot} v_{\odot}^2), \quad \epsilon^* = \epsilon/(\rho v_{\odot}^3), \quad \vec{B}^* = \vec{B}/(\sqrt{\rho} v_{\odot}):$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}^*) = \frac{\dot{\rho}_c}{\rho_{\odot} v_{\odot}} = \tilde{\rho}_c,$$

$$(\vec{\nabla} \cdot n^* \vec{v}^*) = \frac{\dot{n}_c}{n_{\odot} v_{\odot}} = \tilde{n}_c,$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\underline{P}^* + \underline{M}^*) = \frac{\dot{\vec{q}}_c}{\rho_{\odot} v_{\odot}^2} = \tilde{\vec{q}}_c,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left((\epsilon^* + p_g^*) \vec{v}^* - \frac{1}{4\pi} (\vec{v} \cdot \vec{B}^*) \vec{B}^* \right) = \frac{\dot{\epsilon}_c}{\rho_{\odot} v_{\odot}^3} = \tilde{\epsilon}_c.$$

Ein Vergleich der Quellterme zeigt uns, daß

$$\frac{\tilde{\rho}_c}{\tilde{n}_c} = \frac{m_c}{m_p} \simeq 20,$$

$$\frac{\tilde{\rho}_c}{|\tilde{\vec{q}}_c|} = \frac{v_{\odot}}{v_c} \simeq 400,$$

$$\frac{\tilde{\rho}_c}{\tilde{\epsilon}_c} = \frac{v_{\odot}^2}{v_c^2} \simeq 1.6 \cdot 10^5.$$

Für einfache Abschätzungen ist es daher ausreichend, nur die Massenquelle kometerar Ionen $\dot{\rho}_c$ zu berücksichtigen, da sie Wechselwirkung von Sonnenwind und Komet dominiert.

Bei der detaillierten Beschreibung wird das kugelsymmetrische Modell von Huebner (1985) für die chemische Entwicklung des Neutralgases mit einer axial-symmetrischen zweidimensionalen Lösung der MHD-Gleichungen kombiniert und die Quellterme gemittelt (Schmidt et al., 1987). Auf diese Weise wurden bereits die Kometen Halley und Giacobini-Zinner simuliert (Wegmann et al., 1987; Schmidt et al., 1986; Wegmann, 1987). Durch die photochemischen Prozesse werden die Moleküle auf ihrem Weg vom Kometenkern weg in einfachere Arten verwandelt. Die physikalischen und chemischen Eigenschaften des Neutralgases sind daher vom Abstand vom Kometen abhängig. Diese Eigenschaften werden wir übernehmen, um die Quellterme $\dot{\rho}_c$, $\dot{n}_c$, $\dot{\vec{q}}_c$, $\dot{\epsilon}_c$ und $\dot{\epsilon}_e$ in Gln. (2.8, 2.9, 2.10, 2.13 und 2.16) zu beschreiben. Im folgenden erkennt man sie daran, daß sie nur vom Abstand $r = |\vec{x}|$ vom Kometenkern abhängen. Sie werden dann bei den einzelnen Modellen spezifiziert. Für den Halleyschen Kometen findet man sie in den Bildern 5.11 und im Anhang B.

2.3.1. PHOTOIONISATION

Durch die Zerstörung der Muttermoleküle nimmt die Masse der Neutralgas-
teilchen $m_n(r)$ mit dem Abstand r vom Kern ab, auch die Masse der für die Pho-
toionisation relevanten Teilchen $m_{ph}(r)$ zeigt diese Eigenschaft, wenngleich auch
nicht so stark: Schwerere Moleküle haben ein geringeres Photoionisationspotential.
Mit den Photoionisationsraten $\sigma_{ph}(r)$ finden wir die Quellen:

$$\dot{n}_{ph}(r) = \sigma_{ph}(r) n_n(r) ,$$

$$\dot{\rho}_{ph}(r) = \dot{n}_{ph}(r) m_{ph}(r) ,$$

$$\dot{e}_e^{ph}(r) = \dot{n}_{ph}(r) e_{ph}(r) ,$$

worin $n_n(r)$ die Teilchenzahldichte des Neutralgases, die in den Modellen etwas
stärker als r^{-2} abfällt, und $e_{ph}(r)$ die kinetische Überschussenergie der Elektronen
nach dem Ionisationsprozess ist.

2.3.2. IONISATION DURCH ELEKTRONENSTÖSSE

Die Reaktionsrate ist proportional zu den Dichten der Stoßpartner und einer
von der Elektronentemperatur T_e abhängigen Funktion $f_n(T_e)$ (CGS-System):

$$\dot{n}_{ei}(\vec{x}) = f_n(T_e) n_e(\vec{x}) n_n(r) ,$$

$$\lg[f_n(T_e)] = -1.875 [\lg(T_e)]^2 + 21.25 \lg(T_e) - 67.83 .$$

$n_e(\vec{x})$ bestimmen wir aus dem Zustand des Plasmas. Werden bei jedem Ioni-
sationsprozess α ($= 2$) Teilchen erzeugt, so ist:

$$n_e(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) (\alpha - 1)}{\mu(\vec{x}) m_p \alpha} .$$

$\mu(\vec{x})$ ist das mittlere Molekulargewicht

$$\mu(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{n(\vec{x}) m_p} .$$

Für die Massenquelle benutzen wir individuelle Massen $m_{ei}(r)$ der Teilchen, die
bevorzugt durch Elektronenstöße ionisiert werden:

$$\dot{\rho}_{ei}(\vec{x}) = \dot{n}_{ei}(\vec{x}) m_{ei}(r) .$$

Die Kühlung des Elektronengases wird analog zur Teilchenzahlquelle beschrieben:

$$\dot{\epsilon}_e^{ei}(\vec{x}) = f_e(T_e) n_e(\vec{x}) n_n(r) ,$$

$$\lg[f_e(T_e)] = -1.41 [\lg(T_e)]^2 + 14.72 \lg(T_e) - 57.475 .$$

2.3.3. REKOMBINATION

Durch Rekombination von Elektronen und Ionen gehen Plasmateilchen verloren. Mit dem Rekombinationskoeffizienten $\alpha_{rec}^i(T_e)$ für das Ion i gilt:

$$\dot{n}_{rec} = n_i(\vec{x}) n_e(\vec{x}) \alpha_{rec}^i(T_e, r) .$$

Ionen - und Elektronendichte folgen aus dem Plasmazustand. Für Maxwell-verteilte Teilchen ist α_{rec} proportional zu $T_e^{-0.5}$, was quantitativ auf folgende Relation führt:

$$\dot{n}_{rec}(\vec{x}) = a_{rec}(r) n_i(\vec{x}) n_e(\vec{x}) \left(\frac{300K}{T_e} \right)^{0.5} .$$

Die Masse der rekombinierenden Ionen folgt aus dem Zustand des Plasmas:

$$m_i(\vec{x}) = m_p \alpha \mu(\vec{x}) - m_e .$$

Die Massensenke des Plasmas durch Rekombination wird damit:

$$\dot{\rho}_{rec}(\vec{x}) = \dot{n}_{rec}(\vec{x}) m_i(\vec{x}) .$$

2.3.4. LADUNGSAUSTAUSCH

Typische Wirkungsquerschnitte für Ladungsaustauschreaktionen sind $\sigma_{ce} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$. Die Stoßrate wird damit:

$$\dot{n}_{ce}(\vec{x}) = \sigma_{ce} v_{rel}(\vec{x}) n_i(\vec{x}) n_n(r) .$$

Die Relativgeschwindigkeit v_{rel} folgt aus der Plasmageschwindigkeit $v(\vec{x})$, der Radialgeschwindigkeit $v_n(r)$ des Neutralgases aus dem chemischen Modell und der thermischen Geschwindigkeit der Ionen:

$$\frac{1}{2} m_i(\vec{x}) n_i(\vec{x}) v_{th}^2 = \frac{1}{\gamma - 1} \left(p(\vec{x}) - p_e(\vec{x}) \right) ,$$

zu

$$v_{rel} = [(\vec{v} - \vec{v}_n)^2 + v_{th}^2]^{1/2}.$$

Die Massenquelle ergibt sich aus der Differenz von Neutralgas- und Ionenmasse:

$$\dot{\rho}_{ce}(\vec{x}) = \dot{n}_{ce}(\vec{x}) [m_n(r) - m_i(\vec{x})]$$

Analog berechnen wir die Impuls- und Energiequelle:

$$\dot{\vec{q}}_{ce}(\vec{x}) = \dot{n}_{ce}(\vec{x}) [m_n(r) \vec{v}_n(r) - m_i(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x})],$$

$$\dot{\epsilon}_{ce}(\vec{x}) = \dot{n}_{ce}(\vec{x}) \left[\frac{1}{2} m_n(r) \vec{v}_n^2(r) + E_n^{th} - \frac{1}{2} m_i(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x})^2 - E_i^{th} \right].$$

Die Energiequelle berücksichtigt zusätzlich den Verlust thermischer Energie von Ionen

$$E_i^{th} = \frac{p(\vec{x}) - p_e(\vec{x})}{(\gamma - 1) n_i(\vec{x})},$$

und den Gewinn durch Neutralteilchen

$$E_n^{th} = \frac{k_B T_n(r)}{\gamma - 1}.$$

$T_n(r)$ folgt wiederum aus Huebners chemischem Modell.

2.3.5. ELASTISCHE STÖSSE

Elastische Stöße zwischen Neutralgasteilchen und Ionen übertragen Impuls und Energie des Plasmas auf das Neutralgas. Der Impulsverlust beim zentralen Stoß läßt sich aus dem Impuls- und Energiesatz zu

$$\Delta \vec{q}_{col} = 2 m_{red} [\vec{v}_n(r) - \vec{v}(\vec{x})]$$

bestimmen. m_{red} ist die reduzierte Masse:

$$m_{red} = \frac{m_i(\vec{x}) m_n(r)}{m_i(\vec{x}) + m_n(r)}.$$

Durch Mittelung über alle Stoßparameter zur Berücksichtigung nichtzentraler Stöße wird $\Delta \vec{q}_{col}$ halbiert, der Energieübertrag ist nur ein viertel so groß wie beim zentralen Stoß (Jancel und Kahan, 1966). Impuls- und Energieübertrag im nichtzentralen Fall ergeben sich dann zu

$$\Delta \vec{q}_{col} = m_{red} [\vec{v}_n(r) - \vec{v}(\vec{x})],$$

$$\Delta \epsilon_{col} = \frac{m_i m_n}{(m_i + m_n)^2} [m_n \vec{v}_n^2 - m_i \vec{v}^2 + (m_i - m_n) (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_n)] .$$

Zusammen mit der Stoßrate, die wir mit tabellierten Wirkungsquerschnitten $\sigma_{col}(r)$ berechnen,

$$\dot{n}_{col}(\vec{x}) = \sigma_{col}(r) v_{rel}(\vec{x}) n_i(\vec{x}) n_n(r)$$

folgt dann für die Impuls und Energieübertragung elastischer Stöße:

$$\dot{\vec{q}}_{col}(\vec{x}) = \dot{n}_{col}(\vec{x}) \Delta \vec{q}_{col} ,$$

$$\dot{\epsilon}_{col}(\vec{x}) = \dot{n}_{col}(\vec{x}) \Delta \epsilon_{col} .$$

2.3.6. GESAMTQUELLTERME

Wir stellen abschließend die Quellterme so zusammen, wie sie in dem Gleichungssystem des Abschnittes 2.2 benötigt werden. Das Plasma gewinnt Masse durch Photoionisation und Elektronenstöße; es verliert Masse durch Rekombination. Ladungsaustauschreaktionen tragen je nach Massenverhältnis der Neutralteilchen und Ionen negativ oder positiv bei:

$$\dot{\rho}_c = \dot{\rho}_{ph} + \dot{\rho}_{ei} + \dot{\rho}_{ce} - \dot{\rho}_{rec} \quad (2.18)$$

Die Teilchenerzeugung ist analog, nur der Ladungsaustausch ändert an der Teilchenzahldichte nichts. Der Quellterm lautet, falls bei jedem Ionisationsprozess α Teilchen entstehen:

$$\dot{n}_c = \alpha (\dot{n}_{ph} + \dot{n}_{ei} - \dot{n}_{rec}) \quad (2.19)$$

Das Plasma gewinnt Impuls durch die ionisierten Teilchen mit Geschwindigkeit $\vec{v}_n(r)$, was wegen der geringen Geschwindigkeiten nur ein kleiner Beitrag ist. Impulsverluste haben in Rekombinationsprozessen und elastischen Stößen ihre Ursache:

$$\dot{\vec{q}}_c = (\dot{\rho}_{ph} + \dot{\rho}_{ei}) \vec{v}_n - \dot{\rho}_{rec} \vec{v} + \dot{\vec{q}}_{ce} + \dot{\vec{q}}_{col} \quad (2.20)$$

Die Gesamtenergiequelle des Plasmas wird durch dieselben Prozesse wie die Impulsquelle bestimmt. Es müssen lediglich noch die Gewinne und Verluste an thermischer Energie berücksichtigt werden:

$$\dot{\epsilon}_c = \frac{1}{2} (\dot{\rho}_{ph} + \dot{\rho}_{ei}) \vec{v}^2 + (\dot{n}_{ph} + \dot{n}_{ei}) E_n^{th} - \frac{1}{2} \dot{\rho}_{rec} \vec{v}^2 - \dot{n}_{rec} E_i^{th} + \dot{\epsilon}_{col} + \dot{\epsilon}_{ce} \quad (2.21)$$

Da die Elektronen als getrennte Komponente behandelt werden, geben wir abschließend noch die Quellen und Senken für das Elektronengas an. Energiequelle ist die Überschußenergie bei der Photoionisation, Senken sind Elektronenstöße und Rekombination. Zusätzlich zum Energieverlust beim Elektronenstoß muß noch das Ionisationspotential $e_{ei}(r)$, das wir wieder dem chemischen Modell entnehmen, vom Elektronengas aufgebracht werden. Bei der Rekombination geht die thermische Energie

$$\epsilon_e^{th}(\vec{x}) = \frac{p_e(\vec{x})}{(\gamma - 1) n_e(\vec{x})}$$

verloren. Zusammen wird die Energiequelle:

$$\dot{\epsilon}_e^e(\vec{x}) = \dot{\epsilon}_{ph}^e(\vec{x}) - \dot{\epsilon}_{ei}^e(\vec{x}) - \dot{n}_{ei}(\vec{x}) e_{ei}(r) - \dot{n}_{rec}(\vec{x}) \epsilon_e^{th}(\vec{x}) \quad (2.22)$$

Die zur Berechnung erforderlichen Funktionen hängen von der jeweiligen Simulation ab. Die von uns für die Halley und Giacobini-Zinner verwendeten Funktionen werden wir im Abschnitt 5.2.1 diskutieren. Sie sind im Anhang B tabelliert.

3. DAS NUMERISCHE MODELL

In diesem Kapitel wollen wir das numerische Verfahren zur Lösung der Erhaltungsgleichungen der idealen Magnetohydrodynamik aus Abschnitt 2.2 beschreiben. Die größten Anforderungen stellt das Kometenmodell an das Ortsgitter: Es soll zwei bis drei Größenordnungen von der Kontaktdiskontinuität in einem Abstand $R_c \simeq 1000 \text{ km}$ bis zur Bugstoßwelle bei $R_B \simeq 10^6 \text{ km}$ überbrücken. Da bei einem expliziten Verfahren die Länge der kleinsten Gitterzelle den Zeitschritt Δt beschränkt (Courant-Lewy-Friederichs-Stabilitätsbedingung), ist für eine zeitabhängige Lösung ein implizites Verfahren angebracht. Dieses ist auch bei größeren Zeitschritten stabil. Bei vielen Verfahren ergibt eine lineare Analyse Stabilität für jeden beliebigen Zeitschritt. In der Praxis werden uns aber die Randbedingungen, bei denen oft Werte vom letzten Zeitschritt verwendet werden, und physikalische Zeitskalen den Zeitschritt begrenzen; außerdem tragen nichtlineare Effekte bei, die die lineare Stabilitätsanalyse nicht berücksichtigen kann.

Zur Lösung der MHD-Gleichungen entwickeln wir daher ein dreidimensionales zeitabhängiges implizites Differenzenschema. Als Grundlage dient uns dazu der zweidimensionale Algorithmus von Beam und Warming (1976, 1978) zur Lösung der hydrodynamischen Gleichungen, den wir auf dreidimensionale MHD erweitern wollen. Zur Behandlung von Diskontinuitäten wird eine "flux corrected transport" - Prozedur angewendet. Schließlich wird noch ein Verfahren besprochen, mit dessen Hilfe man das Problem nichtverschwindender magnetischer Monopole in numerischen MHD Rechnungen lösen kann, sowie ein halbanalytisches Verfahren zur Berechnung des mittleren Molekulargewichts entwickelt.

3.1. IMPLIZIT FAKTORISIERTE MAGNETOHYDRODYNAMIK: DAS IFMAG DIFFERENZENSHEMA

3.1.1. ZEITINTEGRATION, LINEARISIERUNG UND FAKTORISIERUNG

Das nichtlineare und hyperbolische System der MHD Erhaltungsgleichungen läßt sich in der Form

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \vec{F}_n(\vec{U})}{\partial x_n} = \vec{\Lambda}(\vec{x}, t) \quad (3.1)$$

schreiben. Alle Funktionen sind vom dreidimensionalen Ort $\vec{x}$ und der Zeit t

abhängig, was in diesem Kapitel der Übersichtlichkeit halber nicht explizit angegeben werden soll. Die Gleichung für die Elektronenenergie lassen wir zunächst beiseite, da sie nicht in Erhaltungsform ist. Die Vektoren $\vec{U}$ und $\vec{F}_n$ sind dann:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{q} \\ \epsilon \\ \vec{B} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

mit $\vec{q} = \rho \vec{v}$ und $\epsilon = \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \frac{p}{\gamma-1} + p_{mag}$, $p_{mag} = \frac{\vec{B}^2}{8\pi}$.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ \frac{q_1^2}{\rho} + p_g - \frac{1}{4\pi} B_1^2 \\ \frac{q_1 q_2}{\rho} - \frac{1}{4\pi} B_1 B_2 \\ \frac{q_1 q_3}{\rho} - \frac{1}{4\pi} B_1 B_3 \\ (\epsilon + p_g) \frac{q_1}{\rho} - \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{B})}{\rho} B_1 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} (q_2 B_1 - q_1 B_2) \\ \frac{1}{\rho} (q_3 B_1 - q_1 B_3) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} q_2 \\ \frac{q_1 q_2}{\rho} - \frac{1}{4\pi} B_1 B_2 \\ \frac{q_2^2}{\rho} + p_g - \frac{1}{4\pi} B_2^2 \\ \frac{q_2 q_3}{\rho} - \frac{1}{4\pi} B_2 B_3 \\ (\epsilon + p_g) \frac{q_2}{\rho} - \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{B})}{\rho} B_2 \\ \frac{1}{\rho} (q_1 B_2 - q_2 B_1) \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} (q_3 B_2 - q_2 B_3) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} q_3 \\ \frac{q_1 q_3}{\rho} - \frac{1}{4\pi} B_1 B_3 \\ \frac{q_2 q_3}{\rho} - \frac{1}{4\pi} B_2 B_3 \\ \frac{q_3^2}{\rho} + p_g - \frac{1}{4\pi} B_3^2 \\ (\epsilon + p_g) \frac{q_3}{\rho} - \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{B})}{\rho} B_3 \\ \frac{1}{\rho} (q_1 B_3 - q_3 B_1) \\ \frac{1}{\rho} (q_2 B_3 - q_3 B_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$\vec{\Lambda}(\vec{x}, t)$ ist eine - als bekannt angenommene - Quellfunktion. Überall dort, wo $\vec{\Lambda}$ wieder von $\vec{U}$ selbst abhängt, wird sie explizit mit den Größen vom letzten Zeitschritt berechnet.

Wir werden das Differenzenschema zunächst für eine Integration in der Zeit mit Hilfe der Trapezregel entwickeln und am Ende dann für verschiedene Integrationsmethoden formulieren. Die räumlichen Differenzen werden wir durch allgemeine Operatoren $\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$ beschreiben, die dann später spezifiziert werden. Unter Verwendung der Trapezregel berechnen wir dann die Unbekannten $\vec{U}^{k+1}$ am neuen Zeitschritt $k+1$ aus den $\vec{U}^k$ vom bekannten Zeitschritt k durch Diskretisierung von Gl. (3.1) folgendermaßen:

$$\vec{U}^{k+1} = \vec{U}^k - \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{n=1}^3 \left(\langle \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle \vec{F}_n(\vec{U}^{k+1}) + \langle \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle \vec{F}_n(\vec{U}^k) \right) \right] + \Delta t \vec{\Lambda}^{k+1/2}. \quad (3.6)$$

Die Gl. (3.6) läßt sich nur durch Iteration in $\vec{U}^{k+1}$ lösen. Unter Erhaltung der Genauigkeit des Schemas ($O(\Delta t^2)$ für die Trapezregel) können wir aber ein nicht-iteratives Schema konstruieren, wenn wir die Flußvektoren $\vec{F}_n(\vec{U}^{k+1})$ in erster Ordnung nach Taylor entwickeln und dadurch linearisieren. Dies ist der erste grundlegende Schritt des Schemas. Mit $\Delta \vec{U}^{k+1} = \vec{U}^{k+1} - \vec{U}^k$ gilt:

$$\vec{F}_n(\vec{U}^{k+1}) = \vec{F}_n(\vec{U}^k) + \underline{\Lambda}_n^k \cdot \Delta \vec{U}^{k+1} + O(\Delta \vec{U}^2). \quad (3.7)$$

Die $\underline{\Lambda}_n^k$ sind die Jacobimatrizen mit Komponenten

$$\{\underline{\Lambda}_n^k\}_{i,j} = \frac{\partial F_{n,i}(\vec{U}^k)}{\partial U_j}. \quad (3.8)$$

Sie sind im Anhang C angegeben. Da $\Delta \vec{U}$ proportional zu Δt ist, ist der Fehler, der durch die Taylorentwicklung gemacht wird von der Ordnung Δt^2 und damit unterhalb der Genauigkeit des Verfahrens.

Setzen wir Gl. (3.7) in Gl. (3.6) ein, so folgt ein lineares Gleichungssystem für die Änderungen $\Delta \vec{U}^{k+1}$, dessen Koeffizienten nur noch von den bekannten $\vec{U}^k$ abhängen und daher nicht-iterativ lösbar ist:

$$\left(I + \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^3 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle \underline{A}_n^k \right) \Delta \vec{U}^{k+1} = -\Delta t \sum_{n=1}^3 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle \vec{F}_n^k + \vec{A}^{k+1/2} \Delta t. \quad (3.9)$$

Die Differenzenoperatoren wirken sowohl auf die $\underline{A}_n^k$, als auch auf die $\Delta \vec{U}^{k+1}$, da beides ortsabhängige Funktionen sind.

Der zweite entscheidende Schritt des Algorithmus ist die Faktorisierung der Matrixsumme auf der linken Seite von Gl. (3.9). Die Inversion ist numerisch sehr komplex, da wir für jeden Zeitschritt bei N Ortspunkten in jeder Raumrichtung eine Matrix der Dimension $8N^3$ zu invertieren haben. Diese Matrix ist zwar nicht voll belegt, doch hat sie eine Gestalt, die sich nicht signifikant vereinfachen läßt: Im Falle von zentrierten Ortsdifferenzen besteht sie aus drei block-tridiagonalen Strukturen, die je nach Anordnung der Raumrichtungen in den Zustandsvektoren $\vec{U}$ durch unterschiedlich viele Elemente voneinander getrennt sind. Eine wesentliche Vereinfachung des Schemas erhalten wir aber, falls wir einen zusätzlichen Term der Ordnung Δt^3 addieren, was wiederum unterhalb der Genauigkeit der Rechnung liegt. Dann nämlich können wir die Matrixsumme in Gl. (3.9) als Produkt dreier block-tridiagonaler Matrizen schreiben. Der zusätzliche Term lautet:

$$\left(\frac{\Delta t^3}{4} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle \underline{A}_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \underline{A}_2 + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle \underline{A}_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rangle \underline{A}_3 + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \underline{A}_2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rangle \underline{A}_3 \right) + \right. \\ \left. \frac{\Delta t^4}{6} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle \underline{A}_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \underline{A}_2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rangle \underline{A}_3 \right) \right) \frac{\partial \vec{U}^{k+1}}{\partial t}$$

Damit läßt sich das Differenzenschema faktorisieren:

$$\left(I + \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^3 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle \underline{A}_n^k\right) \Delta \vec{U}^{k+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle \underline{A}_1^k\right) \cdot$$

$$\left(I + \frac{\Delta t}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \underline{A}_2^k\right) \left(I + \frac{\Delta t}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rangle \underline{A}_3^k\right) \Delta \vec{U}^{k+1} + O(\Delta t^3) . \quad (3.10)$$

Unser Differenzenschema nimmt dann folgende Form an:

$$\left(I + \frac{\Delta t}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle \underline{A}_1^k\right) \Delta \vec{U}^{**} = \bar{A}^{k+1/2} \Delta t - \Delta t \sum_{n=1}^3 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle \bar{F}_n^k ,$$

$$\left(I + \frac{\Delta t}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \underline{A}_2^k\right) \Delta \vec{U}^* = \Delta \vec{U}^{**} , \quad (3.11)$$

$$\left(I + \frac{\Delta t}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rangle \underline{A}_3^k\right) \Delta \vec{U}^{k+1} = \Delta \vec{U}^* .$$

Die aktuellen $\vec{U}^{k+1}$ folgen schließlich aus den bekannten $\vec{U}^k$ durch $\vec{U}^{k+1} = \vec{U}^k + \Delta \vec{U}^{k+1}$. Die Matrizen auf der linken Seite haben block-tridiagonale Gestalt, wodurch sich das Gleichungssystem sehr effektiv mit dem Thomas-Algorithmus behandeln läßt (siehe Anhang D). Dieser hat den Vorteil, daß der Rechenaufwand nur linear von der Gesamtzahl der Ortspunkte (N^3) abhängt und damit formal dem eines expliziten Verfahrens gleicht. Bei einer Gauß-Elimination ist die Zahl der Rechenoperationen proportional zu N^9 . Da wir die Gleichungen einer Raumrichtung an allen Punkten der anderen Richtungen lösen müssen, haben wir durch die Faktorisierung Gl. (3.11) die Lösung eines Gleichungssystems mit $8N^3$ Gleichungen durch Lösung von $3N^2$ Systemen mit je $8N$ Gleichungen ersetzt. Bei jedem der drei Schritte in Gl. (3.11) betrachten wir nur Ortsableitungen in einer der drei unabhängigen Raumrichtungen, weshalb man diese Art der Differenzierung auch als "alternating direction implicit" - Methode ("ADI") bezeichnet.

Wir wollen abschließend das Schema noch auf andere Zeitintegrationsmethoden erweitern. Dies ist durch Einführung zweier Parameter Θ und E auf sehr einfache Art möglich. Dazu schreiben wir die zeitliche Diskretisierung von Gl. (3.1) als:

$$\Theta \frac{\partial \bar{U}^{k+1}}{\partial t} + (1 - \Theta) \frac{\partial \bar{U}^k}{\partial t} = \frac{(1 + \Xi) \bar{U}^{k+1} - (1 + 2\Xi) \bar{U}^k + \Xi \bar{U}^{k-1}}{\Delta t} + O\left[\left(\Theta - \frac{1}{2} - \Xi\right) \Delta t + \Delta t^2\right] \quad (3.12)$$

oder

$$\Delta \bar{U}^{k+1} = \frac{\Theta \Delta t}{1 + \Xi} \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}^{k+1} + \frac{\Delta t}{1 + \Xi} \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}^k + \frac{\Xi}{1 + \Xi} \Delta \bar{U}^k + O\left[\left(\Theta - \frac{1}{2} - \Xi\right) \Delta t^2 + \Delta t^3\right]. \quad (3.13)$$

Ersetzen wir die $\frac{\partial}{\partial t} \Delta \bar{U}^{k+1}$ und $\frac{\partial}{\partial t} \bar{U}^k$ durch die Flußdivergenzen aus Gl. (3.1) und führen dieselbe Linearisierung und Faktorisierung der Gl. (3.10) durch, so folgt die allgemeine Formulierung des IFMAG-Schemas:

$$\begin{aligned} & \left(I + \frac{\Theta \Delta t}{1 + \Xi} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle \bar{A}_1^k\right) \left(I + \frac{\Theta \Delta t}{1 + \Xi} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \bar{A}_2^k\right) \left(I + \frac{\Theta \Delta t}{1 + \Xi} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rangle \bar{A}_3^k\right) \Delta \bar{U}^{k+1} \\ &= \frac{\Delta t}{1 + \Xi} \sum_{n=1}^3 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle \bar{F}_n^k(\bar{U}^k) + \frac{\Xi}{1 + \Xi} \Delta \bar{U}^k + \bar{A}^{k+1/2} \Delta t. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Gl. (3.14) wird analog zu Gl. (3.11) gelöst. Durch die Wahl von Θ und Ξ können wir in eleganter Weise verschiedene bekannte Differenzenverfahren erhalten. Alle Verfahren mit $\Theta = \frac{1}{2} + \Xi$ sind von zweiter Ordnung Genauigkeit in der Zeit. Die Tabelle 3.1 enthält einige Verfahren.

Tabelle 3.1: Verfahren zur Zeitintegration von Gl. (3.14):

Algorithmus	Art	Θ	Ξ	Genauigkeit
Euler	explizit	0	0	$O(\Delta t^2)$
Leapfrog	explizit	0	$-\frac{1}{2}$	$O(\Delta t^3)$
Trapezregel	implizit	$\frac{1}{2}$	0	$O(\Delta t^3)$
Euler	implizit	1	0	$O(\Delta t^2)$
3-Punkt	implizit	1	$\frac{1}{2}$	$O(\Delta t^3)$

Die lineare Stabilitätsanalyse des Schemas Gl. (3.14) (Beam und Warming, 1978) zeigt, daß die Algorithmen mit Genauigkeit $O(\Delta t^3)$ absolut stabil sind, wenn $\Xi > 0$ ist. Insbesondere ist das 3-Punkt-Schema mit $\Xi = \frac{1}{2}$ für jeden beliebigen Zeitschritt stabil, während die Integration nach der Trapezregel mit $\Xi = 0$ nur marginale Stabilität liefert. In den Anwendungen des Programms konnte hingegen kein Unterschied zwischen den beiden Differenzen gefunden werden. Wir wenden daher immer die Trapezregel an, da man sich dabei das Speichern des vorletzten Zeitniveaus spart.

3.1.2. RÄUMLICHE DIFFERENZIERUNG

Wir haben im bisherigen die Ortsableitungen noch nicht spezifiziert. Wir folgen dabei zunächst der physikalischen Intuition. Bei Überschallströmungen kann Information nur in Stromrichtung transportiert werden. Wir werden daher die Differenzen von einem betrachteten Punkt aus nur gegen die Stromrichtung bilden. In der Stabilitätsanalyse des linearisierten eindimensionalen Gleichungssystems mit $\vec{\Lambda}(\vec{x}, t) = 0$,

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \underline{\Lambda} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = 0, \quad (3.15)$$

drückt sich dieser Sachverhalt dadurch aus, daß bei Eigenwerten λ der Jacobi-Matrix $\underline{\Lambda}$, die alle dasselbe Vorzeichen haben einseitige Differenzen stabil sind. In der MHD sind die Eigenwerte $\lambda = v, v \pm c_s, v \pm c_a, v \pm (c_s^2 + c_a^2)^{1/2}$ mit der Schallgeschwindigkeit $c_s^2 = \gamma p \rho^{-1}$ und der Alfvéngeschwindigkeit $c_a^2 = \vec{B}^2 / (4\pi\rho)$. Das bedeutet gerade, daß einseitige Differenzen nur in der Überschallströmung Stabilität gewährleisten. Andererseits sind die zentrierten Differenzen mit gemischtem Vorzeichen von λ , die sowohl Strom- als auch Gegenstromrichtung berücksichtigen, im Unter- wie im Überschallbereich stabil. Aufgrund einer linearen Stabilitätsanalyse wären sie also zu bevorzugen. Die Testrechnungen von Beam und Warming (1976) zeigen aber, daß zur Darstellung von Diskontinuitäten und Stoßfronten eine Mischung von einseitigen und zentrierten Differenzen vorteilhaft ist. Aus diesem Grunde werden wir wie folgt differenzieren: Haben die Eigenwerte λ aus Gl. (3.15) alle dasselbe Vorzeichen, so verwenden wir einseitige Differenzen. Die Ableitung in jeder der drei Raumrichtungen lautet dann am Raumpunkt j und Zeitpunkt k :

$$\left\langle \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial x} \right\rangle_j^{k,U} = \left(\frac{f_j^k - f_{j-\text{sign}(\lambda)}^k}{x_j - x_{j-\text{sign}(\lambda)}} \right). \quad (3.16)$$

"U" steht für "upwind". Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir im folgenden nur den Index der Richtung aus, entlang derer differenziert wird.

Im Unterschallbereich mit gemischtem Vorzeichen von λ verwenden wir zentrierte Differenzen. Für nichtäquidistantes Gitter mit $\Delta x_{j+1} = x_{j+1} - x_j$ erhält man diese durch Taylorentwicklung in zweiter Ordnung um x_j und Auflösung nach $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_j$:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_j^{k,C} = D_j^- f_{j-1} + D_j^0 f_j + D_j^+ f_{j+1}, \quad (3.17)$$

mit

$$D_j^- = -\frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta x_j (\Delta x_j + \Delta x_{j+1})},$$

$$D_j^0 = -\frac{\Delta x_j - \Delta x_{j+1}}{\Delta x_j \Delta x_{j+1}},$$

$$D_j^+ = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_{j+1} (\Delta x_j + \Delta x_{j+1})}.$$

"C" steht dabei für "centered". Für $\Delta x_j = \Delta x_{j+1}$ folgt die wohlbekannte zentrierte Differenzenformel im äquidistanten Gitter.

Die beschriebene Differenzierung ist zwar vom Standpunkt der Stabilität und der physikalischen Plausibilität gerechtfertigt, numerisch gehen dem Schema aber an der Übergangspunkten zwischen den einseitigen und den zentrierten Differenzen die Erhaltungseigenschaften verloren (Warming und Beam, 1975). Um die Erhaltungssätze zu erfüllen, muß man konservative Übergangsoperatoren konstruieren. Dabei folgen wir Beam und Warming (1976): Ist der Übergang in Strömungsrichtung von zentrierten zu einseitigen Ableitungen, d.h. Unterschall- nach Überschallströmung, so hat man am letzten Punkt mit gemischtem Vorzeichen der Eigenwerte zentriert, am ersten Punkt mit gleichem Vorzeichen einseitig zu differenzieren. Bei Übergängen von einseitigen zu zentrierten Differenzen, d.h. Überschall- nach Unterschallströmung, hat man die Differenzen zu mischen:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_j = \frac{1}{3} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_j^{k,U} + \frac{2}{3} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_j^{k,C}. \quad (3.18)$$

Am ersten Punkt der Unterschallströmung werden zentrierte Differenzen verwendet. Die räumliche Differenzierung ist in zweiter Ordnung genau.

3.2. NUMERISCHE DIFFUSION

Die Lösungen der nichtlinearen und hyperbolischen Gleichungen Gln. (3.1) beinhalten Diskontinuitäten und Stoßwellen, die ein numerisches Verfahren mit möglichst hoher Genauigkeit aufzulösen hat. Weil bei den starken Gradienten in der Umgebung der Diskontinuitäten die Reihenentwicklungen zur Berechnung der Ableitungen beliebig falsch werden, können Rundungsfehler katastrophale Auswirkungen haben. Das führt in der Nähe von Stoßfronten meistens zu künstlichen numerischen Extrema, die so stark werden können, daß die Stabilität nicht mehr gewährleistet ist. Alle Algorithmen, die sich nicht der Rankine-Hugoniot-Stoßbedingungen bedienen, lösen das Problem durch zusätzliche Addition von Diffusion. Dies geschieht auf der einen Seite durch Einführung der sog. "künstlichen Viskosität" (Richtmyer und Morton, 1967); sie hat den Nachteil, daß sie immer dann gegenwärtig ist, wenn die Strömung komprimiert wird, unabhängig davon, ob eine Stoßwelle auftritt oder nicht. Auf der anderen Seite verwendet man die sog. "Flux Corrected Transport" (-FCT-) Technik (Boris und Book, 1973), die den Vorteil hat, daß sie nur an den Stellen dissipiert, an denen es notwendig ist. Außerdem stellt eine solche Prozedur Monotonie und Positivität sicher und verhindert dadurch, daß numerische Überschwinger negative Dichten zur Folge haben.

Die "klassische" FCT-Prozedur besteht aus drei wichtigen Schritten (Book, Boris und Hain, 1975). Zunächst addiert man Diffusion zum Startmodell. Anschließend geht man damit in den Lösungsalgorithmus. Abschließend subtrahiert man von der Lösung die Diffusion wieder so, daß sie nur dort übrigbleibt, wo sie wirklich benötigt wird. Die Kriterien für letzteres werden durch eine Vorschrift zur Begrenzung der diffusiven Flüsse (den sog. "flux limiter") einbezogen. Er verwandelt die negative Diffusion in eine nichtlineare Operation (Antidiffusion), die sich von der negativen Diffusion in der Nähe steiler Gradienten unterscheidet.

Wir werden in unserem Algorithmus eine verbesserte Version des FCT nach Hain (1978) verwenden, die sich einfacher als die beschriebene "klassische" Form in ein beliebiges Differenzenschema aufnehmen läßt, da sie den Diffusions- und Antidiffusionsschritt in einem durchführt und daher besonders elegant auf eine bestehende Lösung angewendet werden kann. Die einzelnen Schritte seien im folgenden ausgeführt, die drei Ortsindizes seien j, l, m , der Index des Zeitschritts sei

unterdrückt:

1.) Berechne $\vec{U}_{j,l,m}$ am aktuellen Zeitschritt als Lösung von Gl. (3.1) mit dem Algorithmus Gl. (3.14).

2.) Bilde eine Funktion

$$\bar{S}_{j,l,m}^{(1)} = \eta + \frac{\chi}{2} \left[\text{sign}(\Delta \vec{U}_{j+1/2,l,m}) + \text{sign}(\Delta \vec{U}_{j-1/2,l,m}) \right]$$

mit

$$\vec{U}_{j+1/2,l,m} = \frac{1}{2} \left[\vec{U}_{j+1,l,m} + \vec{U}_{j,l,m} \right]$$

η und χ sind freie Parameter. χ entspricht dem Diffusionskoeffizienten des "klassischen" FCT. η hat keine Parallele. $\bar{S}_{j,l,m}^{(1)}$ ist für alle j, l, m zu berechnen. Dasselbe gilt für die Funktionen $\bar{S}_{j,l,m}^{(2)}$ und $\bar{S}_{j,l,m}^{(3)}$ mit:

$$\bar{S}_{j,l,m}^{(2)} = \eta + \frac{\chi}{2} \left[\text{sign}(\Delta \vec{U}_{j,l+1/2,m}) + \text{sign}(\Delta \vec{U}_{j,l-1/2,m}) \right]$$

$$\bar{S}_{j,l,m}^{(3)} = \eta + \frac{\chi}{2} \left[\text{sign}(\Delta \vec{U}_{j,l,m+1/2}) + \text{sign}(\Delta \vec{U}_{j,l,m-1/2}) \right]$$

3.) Berechne die Diffusionsflüsse $\bar{\varphi}_{j+1/2,l,m}^{(d,1)}$ mit Hilfe des flux limiters:

$$\bar{\varphi}_{j+1/2,l,m}^{(d,1)} = \frac{1}{2} \Delta t \mid v_{j+1/2,l,m}^{(1)} \mid \text{sign}(\Delta \vec{U}_{j+1/2,l,m}) \cdot$$

$$\max \left[0, \mid \Delta \vec{U}_{j+1/2,l,m} \mid - \left(1 - \text{sign}(v_{j+1/2,l,m}^{(1)}) \right) \bar{S}_{j+1,l,m}^{(1)} \mid \Delta \vec{U}_{j+3/2,l,m} \mid - \right. \\ \left. \left(1 + \text{sign}(v_{j+1/2,l,m}^{(1)}) \right) \bar{S}_{j,l,m}^{(1)} \mid \Delta \vec{U}_{j-1/2,l,m} \mid \right] \quad (3.19)$$

$v_{j,l,m}^{(1)}$ ist die 1-Komponente des Geschwindigkeitsfeldes, die den Transport und damit den Fluß $\bar{\varphi}_{j+1/2,l,m}^{(d,1)}$ in diese Richtung bestimmt. In gleicher Weise berechnen wir die Flüsse für die anderen beiden Richtungen:

$$\bar{\varphi}_{j,l+1/2,m}^{(d,2)} = \frac{1}{2} \Delta t \mid v_{j,l+1/2,m}^{(2)} \mid \text{sign}(\Delta \vec{U}_{j,l+1/2,m}) \cdot$$

$$\max \left[0, \mid \Delta \vec{U}_{j,l+1/2,m} \mid - \left(1 - \text{sign}(v_{j,l+1/2,m}^{(2)}) \right) \bar{S}_{j,l+1,m}^{(2)} \mid \Delta \vec{U}_{j,l+3/2,m} \mid - \right. \\ \left. \left(1 + \text{sign}(v_{j,l+1/2,m}^{(2)}) \right) \bar{S}_{j,l,m}^{(2)} \mid \Delta \vec{U}_{j,l-1/2,m} \mid \right] \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{j,l,m+1/2}^{(d,3)} &= \frac{1}{2} \Delta t \mid v_{j,l,m+1/2}^{(3)} \mid \operatorname{sign}(\Delta \vec{U}_{j,l,m+1/2}) \cdot \\ \max \left[0, \mid \Delta \vec{U}_{j,l,m+1/2} \mid - \left(1 - \operatorname{sign}(v_{j,l,m+1/2}^{(3)}) \bar{S}_{j,l,m+1}^{(3)} \mid \Delta \vec{U}_{j,l,m+3/2} \mid - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(1 + \operatorname{sign}(v_{j,l,m+1/2}^{(3)}) \bar{S}_{j,l,m}^{(3)} \mid \Delta \vec{U}_{j,l,m-1/2} \mid \right) \right] \right] . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Schließlich ersetzen wir die ursprüngliche Lösung $\vec{U}_{j,l,m}$ durch die diffundierte, geglättete Lösung $\vec{U}_{j,l,m}^d$, die mit Hilfe der Divergenz des diffusiven Flusses gebildet wird:

$$\begin{aligned} \vec{U}_j^d &= \vec{U}_j + \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_n} \varphi^{(d,n)} = \\ \vec{U}_j &+ \left(\frac{\varphi_{j+1/2,l,m}^{(d,1)} - \varphi_{j-1/2,l,m}^{(d,1)}}{x_{j+1}^{(1)} - x_j^{(1)}} \right) + \left(\frac{\varphi_{j,l+1/2,m}^{(d,2)} - \varphi_{j,l-1/2,m}^{(d,2)}}{x_{j+1}^{(2)} - x_j^{(2)}} \right) + \left(\frac{\varphi_{j,l,m+1/2}^{(d,3)} - \varphi_{j,l,m-1/2}^{(d,3)}}{x_{j+1}^{(3)} - x_j^{(3)}} \right) . \end{aligned}$$

Um die Bedeutung der angegebenen Prozedur zu erkennen, schreiben wir die Schritte 1 bis 3 aus, was uns zeigt, daß die Korrektur der Lösung $\vec{U}_j$ im wesentlichen die Addition einer Diffusion proportional zu $\vec{\nabla}^2 \vec{U}_{j+1/2} - \vec{\nabla}^2 \vec{U}_{j-1/2}$ ist. Tritt im Punkt j ein lokales Extremum auf, so wird das Verfahren versuchen, dieses zu glätten. Ist die Funktion monoton, so wird die Korrektur nicht wirksam. Die Stärke der Diffusion wird durch die Koeffizienten η und χ festgelegt. η beschreibt eine konstante Diffusion, während χ nur dann Diffusion erzeugt, wenn der Gradient von $\vec{U}$ das Vorzeichen wechselt. Die Diffusion wird bei $\eta = 0$ minimal, da sie dann tatsächlich nur auf lokale Extrema wirkt. Wir wählen $\chi = 1$ und $\eta = 0$. Eine solche Wahl ist nach den Testrechnungen von Hain (1978) optimal. Wir wenden die Diffusion nur auf die hydrodynamischen Variablen, nicht aber auf das Magnetfeld $\vec{B}$ an.

3.3. NUMERISCHE MAGNETISCHE MONOPOLE

In numerischen MHD Rechnungen ist es im allgemeinen nicht möglich die $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ Bedingung exakt zu erfüllen. Die magnetische Feldgleichung

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = [\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] \quad (3.22)$$

sichert zwar das Verschwinden der magnetischen Monopole, falls $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ im Anfangsmodell erfüllt war, numerisch sind jedoch Rundungsfehler unumgänglich. Nehmen wir an, durch Anwendung der Operatoren $< \vec{\nabla} \cdot >$ $< [\vec{\nabla} \times] >$ entstehe ein Fehler ϵ in der Lösung, dann gilt mit der magnetischen Feldgleichung Gl. (3.22):

$$\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] = \epsilon \quad (3.23)$$

Das bedeutet, daß aufgrund der numerischen Fehler $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ proportional zur Zeit anwächst. Diese künstlichen Monopole führen nun wiederum bei der Lösung der MHD Gleichungen auf eine unphysikalische Komponente der Lorentz-Kraft $\vec{k}$ parallel zum Magnetfeld, da gilt:

$$(\vec{k} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{4\pi} [([\vec{\nabla} \times \vec{B}] \times \vec{B}) \cdot \vec{B}] = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \vec{B})(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) . \quad (3.24)$$

Unter Umständen ist eine stationäre Lösung des Gleichungssystems nicht möglich (Brackbill und Barnes, 1980).

Die numerischen Monopole wurde theoretisch von Ramshaw (1983) und Brackbill und Barnes (1980) untersucht, praktisch wurden sie von Schmidt und Wegmann (1980) am Beispiel ihrer Kometensimulationen demonstriert, was im Bild 1.4 gezeigt wurde. Wir werden die Effekte nichtverschwindender Magnetfelddivergenzen auf die Lösung der MHD Gleichungen im nächsten Kapitel eingehend beschreiben. In diesem Abschnitt werden wir ein Verfahren angeben, mit dessen Hilfe man die Monopole beseitigen kann.

Grundsätzlich gibt es mehrere Möglichkeiten, die $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ Bedingung in ein Differenzenschema aufzunehmen. Schmidt und Wegmann (1980) versuchen, die Effekte der Monopole durch einen zusätzlichen Transportterm in der magnetischen Feldgleichung zu vermindern:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = [\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] - \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) . \quad (3.25)$$

Anschaulich bedeutet das, daß wir die lokal erzeugten Monopole aus dem Volumelement, in dem sie entstehen, herausschwemmen. Offensichtlich ist der Transportterm umso effektiver, je größer die Geschwindigkeit ist. Wir werden darauf bei den Testrechnungen im folgenden Kapitel noch eingehen. Mathematisch können wir das Verfahren begründen, wenn wir $[\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{B}]]$ in anderer Form schreiben:

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] = \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}.$$

Wir erkennen dabei, daß Fehler in $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ über den Term $\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ direkt die Lösung der Feldgleichung stören. Durch Subtraktion dieses Terms von der Feldgleichung erwarten wir, daß ein wichtiger Einfluß der künstlichen Monopole auf die Lösung eliminiert werden kann.

Eine weitere Möglichkeit, die unangenehmen Eigenschaften der numerischen Monopole zu beseitigen, ist die Verwendung der Eulerschen Gleichung anstelle der Impulserhaltungsgleichung:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\underline{P} + \underline{M}) = \dot{\vec{q}}_e. \quad (3.26)$$

Magnetische Monopole treten dann zwar immer noch auf, sie beeinflussen die Lösung aber nicht mehr (Brackbill und Barnes, 1980). Ein Nachteil ist dabei, daß die zuvor von den Monopolen herrührenden Fehler nun als Ungenauigkeiten in der Impulserhaltung auftauchen. Auch sind alle Verfahren, die auf die konservative Form Gl. (3.1) angewiesen sind, wie das von uns verwendete IFMAG Schema, ungeeignet. Auf die konservativen Eigenschaften verzichtet man auch dann, wenn man anstelle der Feldgleichung Gl. (3.22) die Gleichung für das Vektorpotential löst:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} = -[\vec{\nabla} \times \vec{B}], \quad (3.27)$$

mit $\vec{B} = [\vec{\nabla} \times \vec{A}]$. Wir haben dann zwar per definitionem $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$, was aber auf Kosten der magnetischen Flußerhaltung geht.

Die eleganteste Methode zur Vermeidung von $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \neq 0$ ist sicherlich, die $\langle \vec{\nabla} \cdot \rangle$ Operatoren so zu definieren, daß $\langle \vec{\nabla} \cdot \rangle \langle [\vec{\nabla} \times \] \rangle \equiv 0$ ist. In einem rechtwinkligen Gitter, bei dem wir an allen Gitterpunkten zentriert oder einseitig in dieselbe Richtung differenzieren, ist das immer der Fall und $\langle \vec{\nabla} \cdot \rangle \langle [\vec{\nabla} \times \] \rangle \equiv 0$

ist auf Rechnergenauigkeit erfüllt: $\langle \vec{\nabla} \cdot \rangle \langle [\vec{\nabla} \times \vec{F}] \rangle \equiv 0$ im rechtwinkligen Koordinatensystem bedeutet ja gerade, daß die numerische Approximation $\langle \partial_i \rangle \langle \partial_j \rangle \vec{F} - \langle \partial_j \rangle \langle \partial_i \rangle \vec{F} = 0$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn die Koeffizienten der Ableitungen D_j in Gl. (3.17) nur von der Richtung, entlang derer differenziert wird abhängen. Nur dann sind die Differenzenoperatoren der verschiedenen Richtungen vertauschbar. In einem krummlinigen Koordinatensystem ist das aufgrund der ortsabhängigen Geometriefaktoren nicht der Fall und Divergenz der Rotation wird nur in der Genauigkeit des Verfahrens, nicht aber in Rechnergenauigkeit verschwinden. Buneman und Villasenor (1987) verwenden diese Art der Differenzierung in einem kartesischen Koordinatensystem zur Ladungserhaltung bei Teilchensimulationen. Fedder et al. (1983) vermeiden dadurch $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \neq 0$ bei ihren Kometenmodellen. Das Verfahren ist aber nur bei expliziten oder iterativen impliziten Verfahren anzuwenden, und nur dann, wenn die Differenzen nicht gemischt werden, wie es in unserem Verfahren der Fall ist (Abschnitt 3.1.2). Zum einen sind nämlich durch die numerischen Fehler bei der Faktorisierung Gl. (3.10) Fehler in $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ unumgänglich, zum anderen werden durch die Mischung der Differenzen die Differenzenoperatoren ortsabhängig. Die Divergenz von Rotationen verschwindet daher nur in Verfahrensgenauigkeit, nicht aber in Rechnergenauigkeit.

Anstelle der genannten Methoden, die alle für unser Verfahren ungeeignet sind, werden wir eine andere Methode verwenden, die nach der Lösung der MHD Gleichungen Gl. (3.1) durch unser IFMAG-Schema die entstandenen Monopole so weit eliminiert, daß die Strömung nicht mehr beeinflusst wird. Das Verfahren wurde theoretisch von Brackbill und Barnes (1980) und Ramshaw (1983) angegeben, aber seither in der Praxis noch nicht benutzt. Es ist in der Literatur auch unter der Bezeichnung "divergence cleaning" bekannt (Hewett und Nielsen, 1978) und dient dazu, ein Vektorfeld in einen divergenz- und einen rotationsfreien Anteil zu zerlegen. Dabei wird $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ als zusätzliche Bedingung durch Einführung eines Potentials $\Psi(\vec{x}, t)$ in das Differenzenschema aufgenommen. Wir machen den Ansatz:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = [\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] + \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) . \quad (3.28)$$

Durch Anwendung von $\vec{\nabla} \cdot$ auf Gl. (3.28) finden wir die Bestimmungsgleichung für

das Potential $\Psi(\vec{x}, t)$:

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) . \quad (3.29)$$

Mit einem Zeitschritt Δt in unserem numerischen Rechenprogramm sei nun zur Zeit $t - \Delta t$ die $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ - Bedingung erfüllt. Dann können wir $\Psi(\vec{x}, t)$ durch ein anderes Potential $\Phi(\vec{x}, t)$ mit

$$\Phi(\vec{x}, t) = - \int_{t-\Delta t}^t \Psi(\vec{x}, t') dt' ,$$

ersetzen. Φ ist Lösung der Potentialgleichung

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}, t) = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) . \quad (3.30)$$

Auf diese Weise läßt sich die Lösung von Gl. (3.28) vorteilhafter in ein bereits bestehendes Differenzenschema aufnehmen, da nun Gl. (3.28) in die alte Form Gl. (3.22) mit

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = [\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] , \quad (3.31)$$

übergeht, wobei

$$\vec{B}' = \vec{B} + \vec{\nabla} \Phi \quad (3.32)$$

ist.

Die Randbedingung für das Potential Φ muß so gewählt werden, daß im divergenzfreien Fall das Magnetfeld nicht modifiziert wird und Gl. (3.22) mit Gl. (3.28) identisch ist, was in Gl. (3.32) $\vec{B}' = \vec{B}$ oder $\Phi = \text{const.}$ bedeutet. Die Randbedingung muß also homogen in $\vec{\nabla} \Phi$ sein. Die Dirichlet-Bedingung mit $\Phi = \text{const.}$ auf dem Rand erfüllt diese Forderung und setzt voraus, daß das Fehlfeld $\delta \vec{B} = \vec{\nabla} \Phi$ rein normal ist. Auch die Neumann-Bedingung mit konstanter Ableitung in Normalenrichtung ($\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$) erfüllt $\Phi = \text{const.}$ für $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$. Hier ist das Fehlfeld rein tangential, und es gilt:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{B}) d^3x = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0 .$$

In diesem Fall impliziert das Verschwinden des Volumintegrals, daß, sofern $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \neq 0$, die Monopole so verteilt sein müssen, daß sie bei Summation über das Volumen verschwinden. Das ist im allgemeinen sicher nicht erfüllt. In unseren

Rechnungen werden wir daher die Dirichlet-Bedingung mit $\Phi = 0$ auf dem Rand wählen. Im Prinzip sind aber alle Randbedingungen, die $\Phi = \text{const.}$ für $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \rightarrow 0$ liefern, möglich, sie sind aber dann sehr problembezogen. Die Dirichlet-Bedingung ist wohl die allgemeinste und natürlichste Wahl.

Unser Algorithmus ist in drei Schritte unterteilt:

1.) Berechne das Magnetfeld $\vec{B}$ aus der Feldgleichung Gl. (3.22) mit dem Algorithmus Gl. (3.14).

2.) Berechne daraus $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ und löse die Poissonsgleichung Gl. (3.30) für das Potential Φ mit $\Phi = \text{const.}$ auf dem Rand.

3.) Ersetze $\vec{B}$ durch $\vec{B}' = \vec{B} + \vec{\nabla}\Phi$, welches die Bedingung $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}') = 0$ erfüllt.

Bei der numerischen Lösung der Poisson-Gleichung entstehen erneut Fehler, da $\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \rangle < \langle \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \rangle = \langle \vec{\nabla}^2 \rangle$ mit den verwendeten Differenzenoperatoren nur bis zur Ordnung Δx^2 erfüllt ist. Dadurch wird bei einmaligem Durchlaufen des Verfahrens $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ noch nicht in der erforderlichen Weise minimiert. Wir wiederholen daher die Schritte 2.) und 3.) so oft, bis die Größe

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})_{\text{rel}} = \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}{|\vec{B}|} \mid \Delta \vec{x} \mid < \omega \quad (3.33)$$

wird. Wir wählen $\omega = 10^{-5}$. Üblicherweise sind ungefähr 20...40 Iterationen notwendig. $\mid \Delta \vec{x} \mid$ ist der mittlere Abstand der Gitterpunkte. Ist x_j^n der j-te Ortsstützpunkt in Richtung n, so ist

$$\mid \Delta \vec{x} \mid = \frac{1}{6} \left[\sum_{n=1}^3 (x_{j+1}^n - x_{j-1}^n)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.34)$$

Zur numerischen Ausführung des Verfahrens verwenden wir bei der Berechnung von $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ immer die zentrierten Differenzen Gl. (3.17), da nur sie konsistent mit der notwendigerweise zentrierten Darstellung des Laplace-Operators $\vec{\nabla}^2$ sind. Eine Taylor-Entwicklung in 2.Ordnung liefert (in einer Dimension):

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_j = D_j^{-(2)} \Phi_{j-1} + D_j^{o(2)} \Phi_j + D_j^{+(2)} \Phi_{j+1}, \quad (3.35)$$

mit

$$D_j^{-(2)} = \frac{\Delta x_{j+1}}{6},$$

$$D_j^{o(2)} = \frac{\Delta x_{j+1} + \Delta x_j}{\delta},$$

$$D_j^{+(2)} = \frac{\Delta x_j}{\delta},$$

und

$$\delta = \frac{(\Delta x_{j+1})^2 \Delta x_j + (\Delta x_j)^2 \Delta x_{j+1}}{2}.$$

Die Poissongleichung werden wir mit Hilfe einer Jacobi-Iteration behandeln. Dazu lösen wir die diskretisierte Gl. (3.30) nach $\Phi_{j,l,m}$ auf; $\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \rangle$ bedeute die diskretisierte Form mit zentrierten Differenzen:

$$\begin{aligned} \Phi_{j,l,m} = & \left[-\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \rangle - D_j^{-(2)} \Phi_{j-1,l,m} - D_j^{+(2)} \Phi_{j+1,l,m} - D^{-(2)} \Phi_{j,l-1,m} - \right. \\ & \left. D_l^{+(2)} \Phi_{j,l+1,m} - D_m^{-(2)} \Phi_{j,l,m-1} - D_m^{+(2)} \Phi_{j,l,m+1} \right] \left[D_j^{o(2)} + D_l^{o(2)} + D_m^{o(2)} \right]^{-1}. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Die numerische Erfahrung zeigt nun, daß es nicht notwendig ist, die so gewonnenen $\Phi_{j,l,m}$ voll auszutiterieren, da die anschließend durchzuführende Iteration in $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})_{rel}$ nach Gl. (3.33) wesentlich langsamer konvergiert. Wir gehen daher mit den Potentialen $\Phi_{j,l,m}$ an allen Punkten j, l, m direkt über zur Berechnung des neuen Magnetfeldes

$$\vec{B}'_{j,l,m} = \vec{B}_{j,l,m} + \langle \vec{\nabla} \rangle \Phi_{j,l,m}, \quad (3.37)$$

wobei mit $\langle \vec{\nabla} \rangle$ wiederum zentrierte Differenzen gemeint sind. Anschließend setzen wir das Feld $\vec{B}'_{j,l,m}$ in Gl. (3.36) ein und wiederholen die Prozedur solange bis $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})_{rel} < \omega$ erfüllt ist.

Das zusätzliche Verfahren zur Elimination künstlicher magnetischer Monopole benötigt immer weniger als 10% der gesamten Rechenzeit des IFMAG-Schemas.

3.4. EIN HALBANALYTISCHES VERFAHREN ZUR BERECHNUNG DES MITTLEREN MOLEKULARGEWICHTS

Im Abschnitt 3.1 haben wir das IFMAG-Schema zur Lösung der MHD-Gleichungen entwickelt, haben aber dort die Kontinuitätsgleichung und die Energiegleichung für die Elektronen außer Betracht gelassen. Da bei allen MHD-Problemen, bei denen keine Massenquellen mit andersartigen Ionen vorhanden sind, die Erhaltung von Masse und Teilchenzahl äquivalent sind, wollen wir die Teilchenzahlerhaltung separat lösen. Wir können sie dann je nach dem betrachteten Problem lösen oder nicht. Das verwendete Verfahren ist immer dann anwendbar, wenn man es mit einem Satz von Kontinuitätsgleichungen mit unterschiedlichen Quellen zu tun hat. Es basiert auf der numerischen Lösung der Ionisationsgleichungen für Atome mit mehreren Elektronen (Schmidt-Voigt und Köppen, 1987).

Wir formulieren zunächst die Gleichungen für die Massen- und Teilchenzahlerhaltung im Lagrange-System mit der substantiellen Ableitung $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$ des mitbewegten Materieelements:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \dot{\rho}_c, \quad (3.38)$$

$$\frac{Dn}{Dt} = -n(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \dot{n}_c. \quad (3.39)$$

Diese lassen sich in eine Transportgleichung für das mittlere Molekulargewicht $\mu = \frac{\rho}{n m_p}$ umwandeln: Durch Kompression (($\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$)-Term) kann sich das mittlere Molekulargewicht nicht ändern. Wir bilden dazu

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{1}{m_p} \frac{D(\rho/n)}{Dt} = \frac{1}{m_p n} \frac{D\rho}{Dt} - \frac{\rho}{m_p n^2} \frac{Dn}{Dt} = \frac{\dot{\rho}_c}{\rho} \mu - \frac{\dot{n}_c m_p}{\rho} \mu^2. \quad (3.40)$$

Da wir ρ aus der Lösung von Gl. (3.1) mit dem Algorithmus Gl. (3.14) kennen, können wir Gl. (3.40) als Differentialgleichung in μ im Lagrange-System analytisch zwischen t und Δt integrieren:

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \left(\frac{\dot{\rho}_c}{\rho} \mu - \frac{\dot{n}_c m_p}{\rho} \mu^2 \right)^{-1} D\mu = \int_t^{t+\Delta t} Dt,$$

mit der Lösung

$$\frac{\dot{\rho}_c}{\dot{n}_c m_p \mu} = \left(\frac{\dot{\rho}_c}{\dot{n}_c m_p \mu_0} - 1 \right) e^{-\frac{\dot{n}_c}{\rho} \Delta t} + 1. \quad (3.41)$$

Darin ist $\tilde{\mu}_0$ der Startwert zur Zeit t im Lagrange-System, der noch aus dem Euler-System, in dem wir die übrigen Gleichungen lösen, transformiert werden muß. Ist μ_0 das Molekulargewicht im Euler-System, so ist

$$\tilde{\mu}_0 = \mu_0 - \Delta t(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\mu_0, \quad (3.42)$$

wobei wir die Differenzen aus dem Abschnitt 3.1.2 verwenden. Das dargestellte Verfahren zeichnet sich durch absolute Stabilität aus, da Gl. (3.41) für große Δt immer gegen die stationäre Lösung von Gl. (3.40) konvergiert.

Aus der Dichte ρ und dem mittleren Molekulargewicht μ können wir verschiedene Plasmagrößen berechnen. Mit der idealen Gasgleichung folgt die Ionentemperatur:

$$T = \frac{2(\gamma - 1)\mu m_p(\epsilon - \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{8\pi}\vec{B}^2)}{\rho k_B}. \quad (3.43)$$

k_B ist die Boltzmann-Konstante.

Nehmen wir zunächst ein Plasma an, bei dem die kometaren Ionen der Masse m_c durch einen einzigen Mechanismus, bei dem α Teilchen entstehen, ionisiert werden. Es ist dann $\dot{n}_c = \alpha \dot{\rho}_c / m_c$ und es folgen die Teilchenzahldichten von kometaren Ionen n_c , solaren Protonen n_p und Elektronen n_e aus der Erhaltung der Masse, Teilchenzahl und Ladung:

$$n_c = \frac{1 - \left(\frac{m_p + m_e}{2\mu m_p}\right)}{m_c + \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)m_e - \frac{\alpha}{2}m_p}, \quad (3.44)$$

$$n_p = \frac{\frac{\rho}{\mu m_p} - \alpha n_c}{2}, \quad (3.45)$$

$$n_e = \frac{\rho}{\mu m_p} - n_p - n_c. \quad (3.46)$$

Bei den Rechnungen mit detaillierten Quelltermen läßt sich ein einheitliches Molekulargewicht m_c der kometaren Ionen nicht mehr angeben, da verschiedene Moleküle an den unterschiedlichen Prozessen teilnehmen. Die Ionendichte n_i von kometaren Ionen und solaren Protonen und die Elektronendichte n_e sind dann:

$$n_i = \frac{\rho}{\alpha m_p \mu}, \quad (3.47)$$

$$n_e = (\alpha - 1)n_i. \quad (3.48)$$

3.5. BEHANDLUNG DER ELEKTRONEN ALS THERMISCH SEPARATE KOMPONENTE

Die Gleichung für den Elektronendruck

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (p_e \vec{v}) = (\gamma - 1) \left(\dot{\epsilon}_e - p_e (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) \quad (3.49)$$

ist nicht in der Erhaltungsform Gl. (3.1) und kann daher nicht voll implizit in das IFMAG-Schema aufgenommen werden. Wir werden daher die Kompressionsarbeit $p_e (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ als Quellterm zur rechten Seite der Gleichung hinzunehmen und die linke Seite, die die Erhaltungsform hat, wie im Abschnitt 3.1 besprochen behandeln. Die zusätzliche Zeile und Spalte in den Jacobimatrizen $\underline{A}^n$ ist im Anhang C mit aufgeführt.

3.6. NUMERISCHE GITTER

Wir haben das IFMAG-Schema bisher in kartesischen Koordinaten, die wir im Rahmen dieser Arbeit verwenden werden, dargestellt. Um die für die Kometensimulation erforderlichen zwei bis drei Größenordnungen zwischen Bugstoßwelle und Kontaktfläche mit einem äquidistanten Gitter zu überbrücken, würden wir 1000 Gitterpunkte in jeder Raumrichtung benötigen, zusammen also 10^9 , was die Kapazitäten jeder Rechenanlage sprengen würde. Wir werden daher ein nicht-äquidistantes Gitter (für die Halley- und Giacobini-Zinner Simulation) oder ein "MULTIGRID" (nach Dorfi, 1982) verwenden (bei den stationären idealen Modellen und den zeitabhängigen Rechnungen. Zweidimensionale Schnitte durch die Gitter sind in den Bildern 3.1 und 3.2 dargestellt).

Im Falle des nichtäquidistanten Gitters werden die Ortspunkte x_j^n in den drei Raumrichtungen n nach

$$x_j^n = \begin{cases} + (j - \frac{N}{2})^2 x_0 & \forall \frac{N}{2} \leq j \leq N \\ - (j - \frac{N}{2})^2 x_0 & \forall 1 \leq j \leq \frac{N}{2} \end{cases} \quad (3.50)$$

berechnet. x_0 folgt aus der festgelegten Gesamtlänge des Gitters $X_0^n = x_N^n - x_1^n$. Mit wachsendem N nimmt der Abstand vom Nullpunkt proportional zu N^{-2} ab. Wir wählen N immer gerade, damit der Nullpunkt zwischen zwei Stützstellen liegt, um Schwierigkeiten mit dem für $|\vec{x}| = 0$ divergenten Quellterm für kometare Ionen zu umgehen. Aus dem Bild 3.1 geht deutlich hervor, daß die Gitterzellen, die nahe

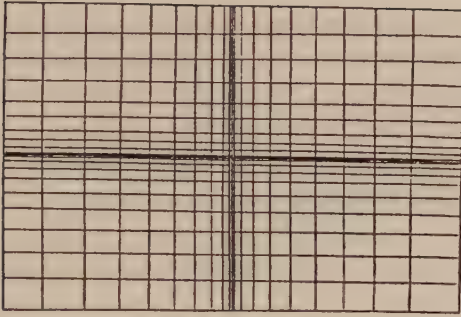


Abb. 3.1: Zweidimensionale Darstellung des nichtäquidistanten Gitters.

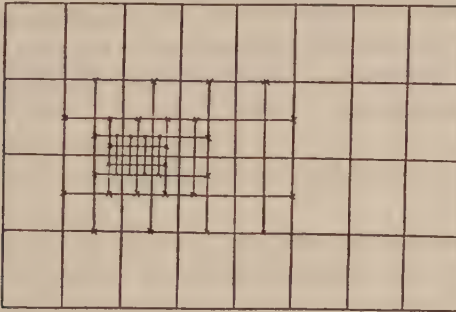


Abb. 3.2: Zweidimensionale Darstellung des MULTIGRID. An den mit Kreuzen markierten Punkten muß aus dem größeren Gitter interpoliert werden.

$|\vec{x}| = 0$ in der einen Richtung liegen, am Rand in einer oder den beiden anderen Richtungen sehr lang und sehr schmal werden können. Bei wachsender Gesamtzahl der Gitterpunkte werden die Zellen immer ungünstiger. Die numerischen Erfahrungen zeigen, daß eine zu große Zahl von Stützpunkten zu Schwierigkeiten bei der Iteration der $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ Bedingung führt. Typischerweise ist bei einem Kometen vom Typ Halley $R_B \simeq 5 \cdot 10^5 \text{ km}$ eine maximale Annäherung von etwa 2500 km an den Kern möglich. Wir überbrücken also etwa zweieinhalb Größenordnungen im räumlichen Gitter.

Bei dem MULTIGRID in Bild 3.2 werden verschiedene Gitter, deren Länge jeweils um einen Faktor zwei gegenüber dem nächstgrößeren Gitter vermindert

werden, überlagert. An den Randpunkten, an denen das nächstgrößere Gitter keine Information liefert, dargestellt durch Kreuze im Bild 3.2, werden die Randpunkte aus den umliegenden, bekannten Punkten linear interpoliert. Dabei treten verschiedene zu interpolierende Punkte auf: Solche, die von vier bekannten Stützstellen umgeben werden, werden durch arithmetrische Mittelbildung der bekannten Werte gebildet, da sie alle den gleichen Abstand von dem unbekannten Punkt haben. Die Punkte, die auf einer Koordinatenlinie des größeren Gitters liegen, werden durch arithmetische Mittelbildung der eben interpolierten Werte belegt. In analoger Weise gehen wir auf den Kanten zwischen den Ebenen vor: Dort verwenden wir die Punkte von den jeweils angrenzenden Ebenen. An den Eckpunkten wird mit Hilfe der Werte auf den angrenzenden Kanten interpoliert.

Durch sukzessive Verfeinerung des Gitters können wir prinzipiell jede beliebige Auflösung des Kerngebiets erreichen. Da der Quellterm für kometare Ionen bei $|\vec{x}| \rightarrow 0$ unendlich wird, müssen wir in der innersten Volumzelle mit Volumen V_o einen Mittelwert $\langle \dot{\rho}_c \rangle$ bilden, so daß

$$\langle \dot{\rho}_c \rangle = \frac{1}{V_o} \int_{V_o} \dot{\rho}_c(\vec{x}) d^3x$$

ist. Analog sind die übrigen Quellterme für Impuls und Energie zu behandeln. Integrieren wir Gl.(2.3) in Kugelkoordinaten bis zu einem Radius R_o mit $\frac{4\pi}{3} R_o^3 = V_o$, so folgt

$$\langle \dot{\rho}_c \rangle = \frac{G}{V_o} \left[1 - \exp \left(-\frac{\sigma}{v_c} \left(\frac{3}{4\pi} V_o \right)^{1/3} \right) \right] \simeq \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} G \frac{\sigma}{v_c} V_o^{-2/3}, \quad (3.51)$$

da im allgemeinen $R_o \ll \frac{v_\infty}{\sigma} (\simeq 10^6 \text{ km})$ gilt. Bei nicht-sphärischen Quellen $\dot{\rho}_c(r, \vartheta, \varphi) = f(r) g(\vartheta, \varphi)$ ist Gl. (3.51) auch gültig, falls

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi.$$

Als Beispiel sei eine Kombination von Kugelfunktionen $g(\vartheta, \varphi) = Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi)$ genannt.

Die numerische Erfahrung mit dem MULTIGRID zeigt, daß bei mehr als etwa fünf Verfeinerungen des Gitters die Fehler, die durch die Interpolation auf den Rändern erzeugt werden, die Lösung stark beeinflussen.

3.7. IFMAG IN ORTHOGONALEN, ROTATIONSSYMMETRISCHEN KOORDINATEN

Orthogonale rotationssymmetrische Koordinaten (Madelung, 1964) werden durch drei Parameter u, v, φ beschrieben. Sie entstehen aus ebenen Koordinaten u, v durch Rotation um einen Drehwinkel φ . Ein prominentes Beispiel sind die Zylinderkoordinaten mit $u = r$ und $v = z$ oder die Kugelkoordinaten mit $u = r$ und $v = \vartheta$. Mit einer Drehachse z und dem Abstand δ von der Drehachse gilt für das Linienelement:

$$ds^2 = \frac{1}{D} (du^2 + dv^2) + \delta^2 d\varphi^2, \quad (3.52)$$

mit dem Dekrement

$$D = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2. \quad (3.53)$$

Das Volumelement ist

$$dV = \frac{\delta}{D} du dv d\varphi. \quad (3.54)$$

Die Vektoroperationen $\vec{\nabla}$, $(\vec{\nabla} \cdot)$ und $\vec{\nabla}^2$, die wir in unserem Schema benötigen, sind:

$$\vec{\nabla} = \left(\sqrt{D} \frac{\partial}{\partial u}, \sqrt{D} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (3.55)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{D}{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\delta}{\sqrt{D}} A_u \right) + \frac{D}{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{\delta}{\sqrt{D}} A_v \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi, \quad (3.56)$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{D}{\sqrt{\delta}} \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{1}{\delta^2 D} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} \right) \right] \sqrt{\delta} \phi =$$

$$\frac{D}{\delta} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\delta \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\delta \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \right] + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \quad (3.57)$$

Damit nimmt der Algorithmus Gl. (3.14) die folgende Form an:

$$\begin{aligned} & \left[I + \frac{\Theta \Delta t}{1 + \Xi} \frac{D}{\delta} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \frac{\delta}{\sqrt{D}} \mathbb{A}_1^k \right) \right] \Delta \vec{U}^{**} = \\ & - \frac{\Delta t}{1 + \Xi} \left[\frac{D}{\delta} \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \left(\frac{\delta}{\sqrt{D}} \vec{F}_1^k \right) + \frac{D}{\delta} \left\langle \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \left(\frac{\delta}{\sqrt{D}} \vec{F}_2^k \right) + \frac{1}{\delta} \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle \vec{F}_3^k \right] \\ & \left[I + \frac{\Theta \Delta t}{1 + \Xi} \frac{D}{\delta} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \frac{\delta}{\sqrt{D}} \mathbb{A}_2^k \right) \right] \Delta \vec{U}^* = \Delta \vec{U}^{**} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\left[I + \frac{\Theta \Delta t}{1 + \Xi \delta} \frac{1}{\delta} < \frac{\partial}{\partial \varphi} > \Lambda_3^k \right] \Delta \vec{U}^{k+1} = \Delta \vec{U}^*$$

Entsprechend sind bei der numerischen Diffusion des Abschnitts 3.2, dem Verfahren zur Beseitigung der künstlichen magnetischen Monopole und bei dem halb-analytischen Verfahren zur Lösung der Transportgleichung für das mittlere Molekulargewicht die Operatoren Gl. (3.55, 3.56, 3.57) einzusetzen. Die Verfahren sind dann so zu konstruieren, wie es in den vorigen Abschnitten dieses Kapitels beschrieben wurde.

Abschließend seien die Parameter für die wichtigsten Koordinatensysteme angegeben. In Zylinderkoordinaten $u = r$, $v = z$ und φ ist $D = 1$ und $\delta = r = u$. Die Umrechnung in kartesische Koordinaten erfolgt durch $x = \delta \cos \varphi$, $y = \delta \sin \varphi$ und $z = z$. In Kugelkoordinaten $u = r$, $v = \vartheta$ und φ ist der Abstand von der Drehachse $\delta = \sqrt{r^2 - z^2}$ und $D = r^{-2}$. Kartesische Koordinaten sind $x = D^{-1/2} \sin v \cos \varphi$, $y = D^{-1/2} \sin v \sin \varphi$, $z = D^{-1/2} \cos v$.

Schließlich geben wir die Parameter für die bei den Kometensimulationen relevanten rotationsparabolischen Koordinaten an. Dabei handelt es sich um konfokale u - und v -Parabeln mit gleicher Symmetrieachse z . Ist $r = \sqrt{z^2 + \delta^2}$ der Abstand vom gemeinsamen Brennpunkt, so ist $u = \sqrt{r + z}$ und $v = \sqrt{r - z}$. Es ist weiterhin $D = \frac{1}{u^2 + v^2} = \frac{1}{2r}$ und $\delta = uv = \sqrt{r^2 - z^2}$. Die Umrechnung in kartesische Koordinaten erfolgt durch $x = uv \cos \varphi$, $y = uv \sin \varphi$ und $z = \frac{u^2 - v^2}{2}$. Eine Vielzahl anderer Koordinatensysteme findet man bei Madelung (1964).

4. TEST DES RECHENPROGRAMMS

Wir wollen jetzt überprüfen, ob die im vorigen Kapitel beschriebenen numerischen Methoden eine befriedigende Lösung der MHD Gleichungen erlauben. Zu diesem Zweck versuchen wir eine analytische Lösung des Gleichungssystems numerisch zu reproduzieren. Dadurch können wir dann untersuchen, inwieweit das im Abschnitt 3.3 beschriebene Verfahren zur Beseitigung der numerischen magnetischen Monopole eine Verbesserung der Lösung bewirkt und welche Auswirkungen die Monopole auf eine gegebene Lösung haben.

4.1. ÄHNLICHKEITSLÖSUNGEN DER MHD-GLEICHUNGEN VON B.C. LOW

Ähnlichkeitslösungen stellen immer dann eine gute Beschreibung physikalischer Situationen dar, wenn das physikalische System zwar seine Größe, nicht aber seine Eigenschaften und Strukturen im Laufe der Zeit ändert. Ein Beispiel hierfür sind koronale Übergänge ("coronal transients", Low, 1984), Strukturen in der Sonnenkorona, die zwar expandieren, ihre Form aber beibehalten. Andere Lösungen existieren für expandierende Sternhüllen ins Vakuum (Low, 1982b), oder für die Expansion Planetarischer Nebel (Giuliani, 1981), um nur einige Beispiele zu nennen. Die wohl prominenteste Ähnlichkeitslösung ist die Sedov-Taylor-Lösung (Sedov, 1959), die die kugelsymmetrische Expansion einer Punktexplosion beschreibt und schon unzähligen Rechenprogrammen als Test gedient hat.

Die Ähnlichkeit in der zeitlichen Entwicklung eines physikalischen Systems wird durch die Einführung einer Ähnlichkeitsvariable $\xi(\vec{x}, t)$ beschrieben. Sie verknüpft das räumliche und zeitliche Verhalten der Lösung. Ein Beispiel in Kugelkoordinaten ist $\xi(r, t) = \frac{r}{c_s t}$ mit der Schallgeschwindigkeit c_s . Mit Hilfe dieser Variablen werden die hydro- oder magnetohydrodynamischen Gleichungen so transformiert, daß nur noch die Variable ξ und bei Berücksichtigung von n räumlichen Dimensionen noch weitere $n - 1$ Ortsvariablen übrigbleiben, in Kugelkoordinaten beispielsweise Polar- und Azimutwinkel ϑ und φ . Die Transformation von einer Ortsvariablen und der Zeit auf nur eine Ähnlichkeitsvariable stellt immer eine Zusatzbedingung an unsere Lösungen, durch die die explizite Zeitabhängigkeit bei der Transformation des Gleichungssystems eliminiert werden kann. Als Beispiele seien die Beschränkung auf die $\gamma = \frac{4}{3}$ Polytrope in Lows Lösungen und die Forderung in Giulianis Lösung, daß die Leuchtkraft des Sterns proportional zu t^{-1} abfalle,

angeführt. Nur wenn eine solche Bedingungen erfüllt ist, kann das physikalische System durch eine Ähnlichkeitslösung beschrieben werden.

Wir werden zum Test unseres Rechenprogramms die Ähnlichkeitslösungen von Low(1982a, 1982b) verwenden. Die MHD-Gleichungen werden analytisch in Kugelkoordinaten gelöst. Es wird angenommen, daß alle Funktionen unabhängig vom Azimutwinkel φ sind ($\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$). Das Gravitationspotential einer Punktmasse M wird berücksichtigt. Die Ausgangsgleichungen lauten dann:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} p = \frac{1}{4\pi} [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] - \rho \frac{GM}{r^2} \vec{e}_r, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = [\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{B}]], \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln(p\rho^{-\gamma}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \ln(p\rho^{-\gamma}) = 0, \quad (4.4)$$

wobei die Zustandsgleichung eines isotropen idealen Gases mit Adiabatenindex γ angenommen wurde. $\vec{e}_r$ ist der Einheitsvektor in radialer Richtung.

Wir wollen zunächst die Ähnlichkeitsvariable ξ definieren. Wir kombinieren sie ganz allgemein aus dem Radius r und einer zeitabhängigen Funktion $\Phi(t)$ in folgender Weise:

$$\xi = \frac{r}{\Phi(t)}. \quad (4.5)$$

Wir wollen weiterhin annehmen, daß das Geschwindigkeitsfeld rein radial gerichtet sei und daß gilt:

$$\vec{v} = \frac{r}{\Phi(t)} \dot{\Phi}(t) \vec{e}_r. \quad (4.6)$$

Mit diesen beiden Annahmen läßt sich bei verschwindender Ableitung in azimutaler Richtung das Magnetfeld durch zwei Funktionen $A(\xi, \vartheta)$ und $Q(A(\xi, \vartheta))$ beschreiben (Low, 1982a). Dichte und Druck gehen in die Ähnlichkeitsfunktionen $P(\xi, A)$ und $D(\xi, \vartheta)$ über. A entspricht dem Vektorpotential der Magnetohydrodynamik. Die Gleichung für A ist daher eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (vergleiche auch mit Gl.(3.27)):

$$\frac{\partial^2 A(\xi, \vartheta)}{\partial \xi^2} + \frac{\sin \vartheta}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A(\xi, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) + Q(A) \left(\frac{dQ(A)}{dA} \right) + 4\pi \xi^2 \sin^2 \vartheta \frac{\partial P(\xi, A)}{\partial A} = 0. \quad (4.7)$$

Druck und Dichte werden durch die Gleichung

$$\frac{\partial P(\xi, A)}{\partial \xi} + \frac{GMD(\xi, \vartheta)}{\xi^2} + \alpha \xi D(\xi, \vartheta) = 0 \quad (4.8)$$

verknüpft. Die physikalischen Größen $\bar{B}$, p und ρ berechnen wir aus den Funktionen A , P , D und Q in folgender Weise:

$$\bar{B} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \vartheta} \tilde{e}_r - \frac{\partial A}{\partial r} \tilde{e}_\vartheta + \Phi^{-1} Q \tilde{e}_\varphi \right), \quad (4.9)$$

$$\rho = D(\xi, \vartheta) \Phi^{-3}, \quad (4.10)$$

$$p = P(\xi, \vartheta) \Phi^{-4}. \quad (4.11)$$

Die Einschränkung, die durch die geforderte Ähnlichkeit unserer Lösung herkommt, wird durch eine Bedingungsgleichung für die Funktion $\Phi(t)$ in Gl. (4.5) beschrieben: Es muß die Relation

$$\frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} = \alpha \Phi^{-2}(t) \quad (4.12)$$

mit konstantem α gelten; andernfalls läßt sich die explizite Zeitabhängigkeit nicht eliminieren.

Bei der Konstruktion der Ähnlichkeitslösungen gehen wir folgendermaßen vor: Zunächst wähle man die Funktion $\Phi(t)$ und damit die Ähnlichkeitsvariable ξ . Mit Gl. (4.10) und Gl. (4.11) gehen wir dann in die Energiebilanz Gl. (4.4) und finden, daß die explizite Zeitabhängigkeit nur für $\Phi^{3\gamma-4} = \text{const.}$ und damit $\gamma = \frac{4}{3}$ verschwindet. Das ist unsere Bedingung für die Ähnlichkeit der Lösung. Nach der Wahl von Φ geben wir zwei der vier Funktionen in Gln. (4.7, 4.8) physikalisch sinnvoll vor. Hier muß die Intuition den Weg weisen. Wir lösen dann nach den übrigen Funktionen auf.

Wir wollen das Vorgehen am Beispiel der Expansion einer Sternatmosphäre (Low, 1982b) demonstrieren. Diese Lösung dient uns dann gleichzeitig als Test des numerischen Rechenprogramms. Wir nehmen an, daß die Atmosphäre durch ein intrinsisches stellares Dipolfeld expandiere und machen daher den Dipolansatz:

$$A(\xi, \vartheta) = A_0 (a^2 - \xi^2) \sin^2 \vartheta. \quad (4.13)$$

a ist die Geschwindigkeit des äußeren Randes der expandierenden Hülle. Wir setzen $\alpha = 0$ und nach Gl. (4.12) wird dann $\Phi = t$. Die resultierende Magnetfeldstruktur in der (ξ, ϑ) -Ebene ist in dem Bild 4.1 dargestellt.

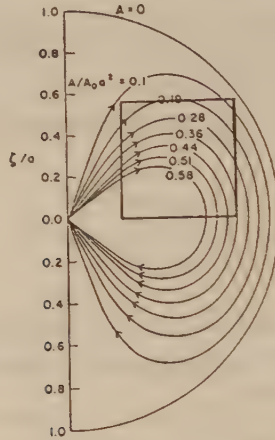


Abb. 4.1: Magnetfeldstruktur der Ähnlichkeitslösung einer expandierenden Sternatmosphäre, die durch das Potential $A(\xi, \vartheta) = A_0 (a^2 - \xi^2) \sin^2 \vartheta$ erzeugt wird. Der eingezeichnete Bereich wird bei den Testrechnungen des Programms numerisch reproduziert. Aus Low (1982b).

Wenn wir weiterhin annehmen, daß die φ -Komponente des Magnetfeldes verschwinde, d.h. $Q(A) \equiv 0$, können wir Gl. (4.7) mit dem Ansatz Gl. (4.13) integrieren und die Druckfunktion $P(\xi, A)$ berechnen:

$$P(\xi, A) = \frac{A_0^2}{2\pi} \frac{a^2(a^2 - \xi^2)}{\xi^4} \sin^2 \vartheta + P_0(\xi) . \quad (4.14)$$

$P_0(\xi)$ ist eine Integrationskonstante. Sie hängt nur noch von ξ ab, da über A integriert wurde. Aus der Gl. (4.8) folgt die Dichtefunktion

$$D(\xi, \vartheta) = \frac{A_0^2}{\pi GM} \frac{2a^2(a^2 - \xi^2)}{\xi^2} \sin^2 \vartheta + D_0(\xi) , \quad (4.15)$$

mit

$$D_0(\xi) = -\frac{\xi^2}{GM} \frac{dP_0(\xi)}{d\xi} .$$

$D_o(\xi)$ und $P_o(\xi)$ sind die Lösungen für eine magnetfeldfreie Atmosphäre. Wir wählen statische Lösungen, d.h. nach Gl. (4.11) $P_o \approx \Phi^4 \approx \xi^{-4}$:

$$P_o(\xi) = \Omega \xi^{-4}, \quad (4.16)$$

$$D_o(\xi) = \frac{4\Omega}{GM\xi^3}. \quad (4.17)$$

Wir fassen die gesamte Lösung nochmals in Kugelkoordinaten zusammen, wobei wir willkürlich die Konstante $\Omega = \frac{A_o^2}{\pi} a^4$ wählen. Die statische Lösung ("Hintergrund") ist dann von derselben Größenordnung wie der zeitabhängige Anteil. Damit wird:

$$\rho(r, \vartheta, t) = \frac{A_o^2}{\pi GM r^3} \left[2a^2 \left\{ a^2 - \left(\frac{r}{t} \right)^2 \right\} \sin^2 \vartheta + 4a^4 \right], \quad (4.18)$$

$$p(r, \vartheta, t) = \frac{A_o^2}{\pi r^4} \left[\frac{1}{2} a^2 \left\{ a^2 - \left(\frac{r}{t} \right)^2 \right\} \sin^2 \vartheta + a^4 \right], \quad (4.19)$$

$$\vec{B} = \frac{2A_o}{r^2} \left[a^2 - \left(\frac{r}{t} \right)^2 \right] \cos \vartheta \vec{e}_r + \frac{2A_o}{t^2} \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta, \quad (4.20)$$

$$\vec{v} = \frac{r}{t} \vec{e}_r. \quad (4.21)$$

Physikalisch werden an einem festen Punkt r für $t \rightarrow \infty$ die Magnetfeldlinien von der Dipolkonfiguration durch das radial gerichtete Geschwindigkeitsfeld in radiale Richtung gezogen. Nach Gl. (4.20) ist $\vec{B}(r, t \rightarrow \infty) = \frac{2A_o}{r^2} a^2 \cos \vartheta \vec{e}_r$.

Die Berechnung der thermischen Energie kT zeigt weiterhin, daß thermische und Gravitationsenergie von gleicher Größenordnung sind. Die Lösung Gln. (4.18, 4.19, 4.20, 4.21) hat außerdem die zum Programmtest angenehme Eigenschaft, daß das auch für die magnetische Energie gilt; wir können also auch die Behandlung der magnetischen Kräfte in idealer Weise prüfen. Bei der Dehnung der Feldlinien von der Dipolkonfiguration in radiale Richtung werden nämlich sowohl magnetische Druckkräfte $\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{8\pi} \vec{B}^2$, als auch die Krümmungskräfte $\frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$ wichtig.

Wir legen für die Testrechnung des nächsten Abschnitts folgende Modellparameter fest. Wir nehmen einen stellaren Kern mit einer Masse von $1 M_\odot$, eine

Geschwindigkeit von 10^4 km s^{-1} und ein Magnetfeld von etwa 10^3 G an. Diese Wahl entspricht einer Supernova- oder Nova-Explosion. Die Parameter in der Ähnlichkeitslösung sind dann $a = 2 \cdot 10^3 \text{ km s}^{-1}$ und $A_0 = 6 \cdot 10^7 \text{ G s}^2$. Wir werden die Rechnung zwischen $r = 0.35 R_\odot$ und $r = 1.5 R_\odot$ durchführen.

Unser numerisches Rechenprogramm arbeitet in kartesischen Koordinaten, in denen keine der Komponenten von Magnet- und Geschwindigkeitsfeld verschwinden. Die Testlösung ist daher ein echter dreidimensionaler, zeitabhängiger Test des Programms. Wir geben abschließend noch die Transformation der Lösung Gln. (4.18, 4.19, 4.20, 4.21) in kartesische Koordinaten (x, y, z) an:

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \\ \vartheta &= \arctg\left(\frac{x^2 + y^2}{z}\right)^{1/2}, \\ \vec{e}_r &= \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\vartheta &= \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.2. EFFEKTE NUMERISCHER MAGNETISCHER MONOPOLE AUF EINE GEBENE LÖSUNG DER MHD-GLEICHUNGEN

Wir wollen jetzt unser IFMAG Schema testen; dazu wählen wir die Start- und Randbedingungen, sowie die Gravitationskräfte der Lösung Gln. (4.18, 4.19, 4.20, 4.21) mit der Transformation Gl. (4.22). Die Lösung ist offensichtlich nur für $r < at$ physikalisch sinnvoll; andernfalls werden Druck und Dichte negativ. Wir legen unser Gitter in einen Abstand von 0.35 bis $1.5 R_\odot$ vom Zentrum des Sterns (siehe auch Bild 4.1) und rechnen in einem kartesischen Gitter mit acht Punkten in jeder Raumrichtung; die Abstände zwischen den Gitterpunkten nehmen mit dem Abstandsquadrat vom Stern zu. Damit testen wir die Funktionsfähigkeit der nichtäquidistanten Gradienten und Laplace-Operatoren. Unser Startzeitpunkt ist $t_0 = 500 \text{ s}$. Wir berechnen etwa 200 Zeitschritte mit einer Schrittweite von ungefähr dem 1.2-fachen Courant-Zeitschritt

$$\tau_c = \min \left\{ \frac{|\Delta \vec{x}|}{|\vec{v}| + \sqrt{c_s^2 + c_a^2}} \right\}. \quad (4.23)$$

Eine andere Wahl der Parameter ändert die folgenden Ergebnisse nicht.

Als Maß für die Genauigkeit des Rechenprogramms definieren wir zwei unterschiedliche Fehler: Zum einen den Vektorfehler ϵ_{vec} als mittlere Standardabweichung zwischen analytischer und numerischer Lösung. Es werden alle acht Variablen der MHD-Lösung in Betracht gezogen:

$$\epsilon_{vec}^k = \frac{1}{8 N_1 N_2 N_3} \sqrt{\sum_{j=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{m=1}^{N_3} \sum_{n=1}^8 \left[\frac{U_{j,l,m,n}^k - U_n^a(\bar{x}_{j,l,m}, t^k)}{\frac{1}{2}(U_{j,l,m,n}^k + U_n^a(\bar{x}_{j,l,m}, t^k))} \right]^2}. \quad (4.24)$$

Dabei sind N_1 , N_2 und N_3 die Zahl der Stützstellen in den drei Raumrichtungen und $U_n^a(\bar{x}, t)$ die analytische Lösung für die n -te Komponente von $\vec{U}$. Der Nachteil der Fehlerbetrachtung Gl. (4.24) ist, daß der Fehler unrealistisch groß wird, wenn eine Komponente der Vektoren $\vec{v}$ oder $\vec{B}$ das Vorzeichen wechselt. Dann geht in der Umgebung dieses Zeitschritts der Nenner in Gl. (4.24) gegen Null. Aus diesem Grunde betrachten wir auch den "Skalarfehler" ϵ_{scal} , bei dem nur die Beträge der Vektoren berücksichtigt werden, nicht aber deren Komponenten. Er wird in dergleichen Weise wie Gl. (4.24) berechnet, nunmehr aber nur mit $n = 4$ Funktionen.

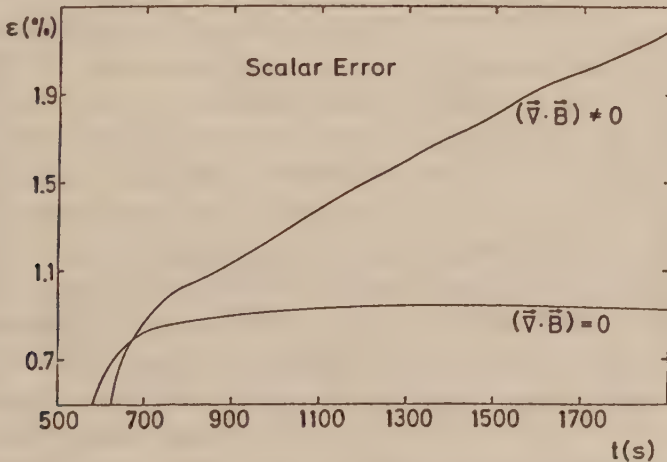


Abb. 4.2: Skalarfehler ϵ_{scal} als Funktion der Entwicklungszeit für zwei Modelle. In dem mit $(\vec{v} \cdot \vec{B}) = 0$ bezeichneten Modell wurden die magnetischen Monopole mit dem Verfahren aus Abschnitt 3.3 eliminiert, bei $(\vec{v} \cdot \vec{B}) \neq 0$ nicht.

Der Skalarfehler ("Scalar Error") wurde in dem Bild 4.2 als Funktion der Entwicklungszeit des oben angegebenen Modells aufgetragen. Beide Modelle zeigen anfangs ($t < 700$ s) einen sehr raschen Anstieg des Fehlers, da im Startmodell $\epsilon_{scal} = \epsilon_{vec} \equiv 0$ ist; es stellt sich zunächst ein natürliches Niveau des numerischen Fehlers ein.

Bei dem mit $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ bezeichneten Modell werden die Monopole mit dem Verfahren aus Abschnitt 3.3 bis auf $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})_{rel} < 10^{-5}$ nach Gl.(3.33) unterdrückt. Das Modell mit $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \neq 0$ wurde ohne Korrektur und ohne den Transportterm Gl.(3.25) zur Reduzierung der Monopole erzeugt. Es zeigt für $t > 700$ s praktisch einen linearen Anstieg des skalaren Fehlers mit der Zeit. Nach Gl.(3.23) hatten wir bereits vermutet, daß $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ bei konstantem numerischem Rundungsfehler proportional zur Zeit anwachsen müsse. Die Tatsache, daß nun auch der gesamte Fehler linear mit der Zeit ansteigt bedeutet, daß Fehler in $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ direkt (linear) auf die Lösung der übrigen Variablen wirken. Wir können daher eine Proportionalität von mittlerem Skalarfehler ϵ_{scal} und relativen Magnetfelddivergenzen $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})_{rel}$ vermuten.

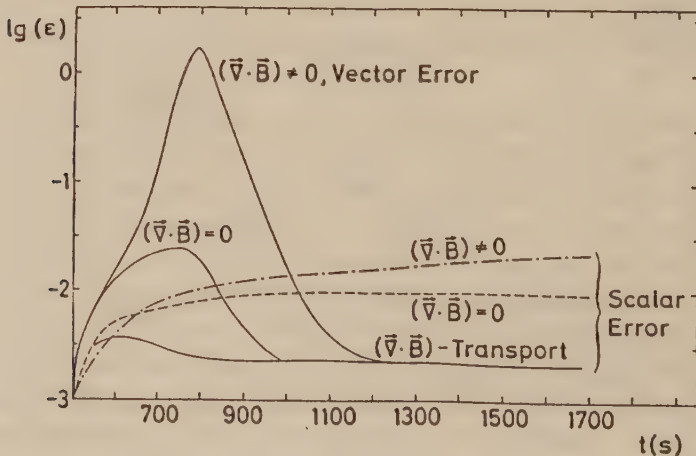


Abb. 4.3: Vektor- und Skalarfehler logarithmisch dargestellt als Funktion der Entwicklungszeit. " $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ -Transport" berücksichtigt den Transportterm Gl.(3.25).

In dem Bild 4.3 ist zusätzlich zum Skalarfehler auch der Vektorfehler ("Vector Error") und Lösungen, die den Transportterm Gl.(3.25) als Quelle in der Feldgleichung explizit berücksichtigen, eingezeichnet. Der Fehler wurde logarithmisch aufgetragen, die Abszisse ist identisch mit dem Bild 4.2. Die Modelle mit durchgezogenen Linien berücksichtigen den Transportterm, das strichpunktierte sowie das gestrichelte Modell sind dem Bild 4.2 entnommen und wurden ohne $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ -Korrektur bzw. mit dem Verfahren aus dem Abschnitt 3.3 gerechnet. Ohne die $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ -Korrektur (Kurve mit $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \neq 0$, Vector Error) wächst der Vektorfehler um $t = 800 \text{ s}$ sehr stark an: Hier wechselt die z -Komponente des Magnetfeldes beim "Auseinanderbiegen" des ursprünglichen stellaren Dipolfeldes zu einer rein radialen Konfiguration ihr Vorzeichen. Dabei wird diese Komponente sehr klein gegen die übrigen, wodurch im Bereich des Umknickens der Vektorfehler bis auf etwa 100% stark anwächst. Dieser große Fehler läßt sich sehr effektiv um ungefähr zwei Größenordnungen verringern, wenn wir das Korrekturverfahren des Abschnitts 3.3 verwenden, was bei dem durchgezogenen Modell mit $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ getan wurde. Der Vektorfehler wird dadurch auf ein Maximum von nur 2.3% reduziert. Das Korrekturverfahren gewährleistet also eine erhebliche Verbesserung der Genauigkeit kleiner Magnetfeldkomponenten.

Nach dem Fehlermaximum bei $t = 900 \text{ s}$ fällt der Vektorfehler sehr stark ab und nimmt für $t > 1000 \text{ s}$ ein konstantes Niveau von ungefähr 0.2% an. Hier wird die Lösung allmählich stationär. Das Niveau ist noch erheblich geringer als das Niveau des Skalarfehlers des Modells aus Bild 4.2, bei dem nur das Korrekturverfahren, nicht aber der Transportterm verwendet wurde.

Es mag auf den ersten Blick verwundern, daß auch bei der Korrektur nach $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ der Transportterm $-\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ eine Rolle spielt. Der Grund dafür ist, daß zur Berechnung von $\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \rangle$ in der Poissonsgleichung (3.30) zentrierte Differenzen verwendet werden, während im Transportterm solche nur bei Unterschallströmungen Anwendung finden; Überschallströmungen werden dort immer einseitig differenziert. Alle Lösungen von Bild 4.2 und Bild 4.3 wurden mit Überschallströmungen gerechnet. Nach der Korrektur verschwindet dann zwar die zentrierte Approximation von $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$, die einseitigen Differenzen im Transportterm liefern aber dennoch einen Beitrag, was durchaus zum Vorteil der Rechnung ist, wie man dem Bild 4.3 entnehmen kann.

Das durchgezogene Modell, bei dem neben der " $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ -Transport"-Bezeichnung keine weiteren Erläuterungen angebracht wurden, zeigt den Skalarfehler für ein Modell, das sowohl die $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ -Korrektur, als auch den Transportterm berücksichtigt. In diesem Fall ist der Fehler am geringsten. Das Maximum beim "Geradebiegen" der Feldlinien liegt bei etwa 0.3%, das konstante Niveau für $t > 1000$ s bei ungefähr 0.2%. Wir erinnern daran, daß unsere Rechnung mit nur acht Gitterpunkten in jeder Raumrichtung durchgeführt wurde und daß die Genauigkeit die Erwartungen, zumindest meine eigenen, um etwa eine Größenordnung übertrifft. Das ist insbesondere dem Transportterm Gl.(3.25) zu verdanken. Das Korrekturverfahren scheint, abgesehen von der genauen Auflösung der kleinen Magnetfeldkomponenten, weniger effektiv zu sein. Das gilt aber nur solange, wie wir mit Überschallströmungen rechnen. Lows Lösung für das Geschwindigkeitsfeld Gl. (4.21) können wir entnehmen, daß die Geschwindigkeit bei einem festen Abstand r vom Nullpunkt proportional zu t^{-1} abnimmt. Für $t > 2500$ s wird die Geschwindigkeit schließlich kleiner als die Schallgeschwindigkeit und unsere Lösung zeigt ein ganz anderes Verhalten. Die durch die Monopole erzeugte künstliche Kraftkomponente parallel zum Magnetfeld,

$$(\vec{k} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{4\pi} \vec{B}^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) ,$$

ist relativ zur Strömungsgeschwindigkeit umso größer, je kleiner die Geschwindigkeit gegenüber der Alfvéngeschwindigkeit ist, da der Fehler in $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ umso größer ist, je größer $\vec{B}$ ist (Brackbill und Barnes, 1980). Auf der anderen Seite wird der Transportterm in Gl.(3.25) umso weniger effektiv, je geringer die Strömungsgeschwindigkeit ist. Diese beiden Effekte führen dazu, daß wir für Unter(magneto)schallströmungen auf das Korrekturverfahren nicht mehr verzichten können.

Das ist in dem Bild 4.4 demonstriert. Hier ist der Skalarfehler als Funktion des Maximums von $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})_{rel}$ an jedem Zeitschritt aufgetragen. Die erhaltene Funktion ist das Ergebnis verschiedener Testrechnungen mit unterschiedlichen Parametern im analytischen Modell, also auch mit unterschiedlichen Zeitskalen. Trotz der unterschiedlichen Entwicklungszeiten zeigen aber alle Modelle dieselbe Abhängigkeit von Skalarfehler und relativen Magnetfelddivergenzen. Es sei erwähnt, daß die $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ -Achse keine Zeitachse ist, da Fehler und Divergenz

ein Maximum beim "Geradebiegen" der Dipolfeldlinien haben und später wieder abfallen. Der Überschallbereich umfaßt etwa 2000 s der Modelle von Bild 4.2 und Bild 4.3, der Unterschallbereich dagegen nur 100 s.

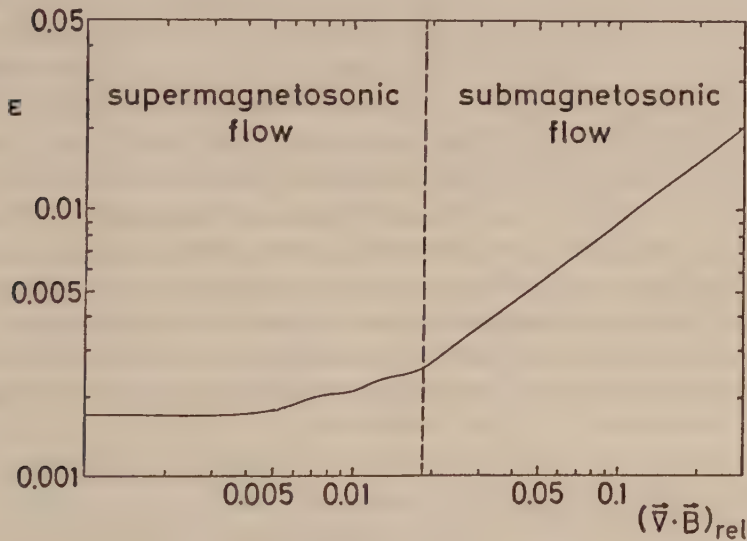


Abb. 4.4: Skalarfehler als Funktion der maximalen relativen Magnetfelddivergenzen $(\vec{v} \cdot \vec{B})_{rel}$.

In den Modellen in Bild 4.4 wurde der Transportterm Gl.(3.25), nicht aber die Korrektur berücksichtigt; sie entsprechen daher den durchgezogenen Modellen mit $(\vec{v} \cdot \vec{B}) \neq 0$ aus dem Bild 4.3. Für kleine Magnetfelddivergenzen ($(\vec{v} \cdot \vec{B})_{rel} < 1\%$), was dem Überschallbereich entspricht, beträgt der Fehler in der Lösung nur einige Promill, und die Monopole haben offensichtlich keine nennenswerten Auswirkungen auf die Strömungseigenschaften; das ändert sich drastisch, wenn die Geschwindigkeit abnimmt, die Monopole mit dem Transportterm nicht mehr genügend effektiv wegtransportiert werden und daher die Divergenzen wachsen. Dann wächst der Fehler der gesamten Lösung linear mit $(\vec{v} \cdot \vec{B})_{rel}$ an, wie wir es bereits vermuteten. Dieses Verhalten fällt ziemlich genau mit dem Übergang von Über- zu Unterschallströmung zusammen. Die Lösung wird nun nach relativ kurzer Zeit

(≈ 100 s) für die oben genannten Modellparameter unphysikalisch ($p, \rho < 0$), die Rechnung wurde daher abgebrochen.

Wenden wir dagegen im Unterschallbereich das Korrekturverfahren an, so bleibt $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})_{rel} < 10^{-5}$ und der Fehler ist immer bei einigen Promill, aber etwas höher als im Überschallbereich. Das ist nicht erstaunlich, da dort auch der nur mit dem Korrekturverfahren ermittelte Fehler etwas höher lag als bei zusätzlicher Anwendung des Transportterms. Im Unterschallbereich hat der Transportterm bei simultaner Verwendung des Korrekturverfahrens keine Funktion mehr, da bei der Berechnung von $(\langle \vec{\nabla} \rangle \cdot \vec{B})$ immer zentrierte Differenzen verwendet werden.

Zusammenfassend können wir aus den Tests des IFMAG-Schemas schließen, daß bei Verwendung von Transportterm und Korrekturverfahren eine Approximation der Lösung der MHD-Gleichungen mit einer erstaunlichen Genauigkeit von einigen Promill bei größenordnungsmäßig zehn Stützstellen in jeder der drei Raumrichtungen erreicht wird. Gegen künstliche magnetische Monopole müssen wir immer etwas unternehmen. Im Überschallbereich genügt bereits die Berücksichtigung des Transportterms $-\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ als Quelle in der magnetischen Feldgleichung. Das Korrekturverfahren verbessert hier nur die Genauigkeit kleiner Magnetfeldkomponenten erheblich. Bei Unterschallströmungen oder wenn $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})_{rel} \gtrsim 1\%$, müssen wir das Korrekturverfahren - oder eine andere Methode zur Beseitigung der ungeliebten Monopole - anwenden.

5. STATIONÄRE MODELLE FÜR KOMETARE PLASMEN

Wir wollen nun das in den vorigen Kapiteln entwickelte und getestete MHD-Rechenprogramm auf die Wechselwirkung eines Kometen mit dem Sonnenwind anwenden. Wir werden zunächst die allgemeinen Eigenschaften an einem idealisierten Modell diskutieren, bei dem eine konstante Ionisationsrate, Ionenmasse und Neutralgasgeschwindigkeit angenommen wird. Die Quellterme sind dann unabhängig von dem Zustand des Plasmas und lassen sich problemlos in das Kometenmodell aufnehmen. Die in dieser Weise idealisierten Modelle werden uns einen Einblick in die wesentlichen physikalischen Eigenschaften des kometaren Plasmas geben. Für den Vergleich mit Meßdaten von den Kometen Halley und Giacobini-Zinner reichen sie allerdings nicht aus. Hier müssen wir die Quellen für Masse, Impuls und Energie durch die Wechselwirkung von Plasma und Neutralgas aus dem Abschnitt 2.3 berücksichtigen. Beim Kometen Halley werden wir dann mit einem idealisierten Modell vergleichen und die Unterschiede zur Simulation von Schmidt und Wegmann (1987) herausarbeiten.

5.1. IDEALISIERTE MODELLE

Idealisierte Modelle seien so definiert, daß Photoionisation mit konstanter Rate σ bei sphärisch symmetrischer Verteilung des Neutralgases um den Kern einziger Ionisationsprozess sei. Sie entsprechen den Modellen von Schmidt und Wegmann (1982). Der Quellterm für die Massendichte ist $\dot{\rho}_c$ nach Gl.(2.3); bei konstanter Masse m_c und Geschwindigkeit v_c der Ionen folgt dann $\dot{n}_c = \dot{\rho}_c m_c^{-1}$, $\dot{q}_c = \dot{\rho}_c \bar{v}_c$ und $\dot{\epsilon}_c = \frac{1}{2} \dot{\rho}_c \bar{v}_c^2$. Die Elektronen werden, wie im Abschnitt 2.2 diskutiert, als kalte Komponente betrachtet. Ihre Energie kann die magnetohydrodynamische Strömung zwar beeinflussen, nicht aber wesentlich verändern.

Für das idealisierte Modell nehmen wir dem Kometen Halley ähnliche Parameter an: Die Produktionsrate sei $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$, die Molekülmasse $m_c = 20 m_p$, die Molekülgeschwindigkeit $v_c = 1 \text{ km s}^{-1}$ und die Ionisationsrate $\sigma = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. Der Sonnenwind habe eine Dichte $\rho_\odot = 5 m_p \text{ cm}^{-3}$, Geschwindigkeit $v_\odot = 400 \text{ km s}^{-1}$, Temperatur $T_\odot = 5 \cdot 10^4 \text{ K}$ und Magnetfeld $B_\odot = 5 \text{ nT}$. Er ströme in die x -Richtung unseres kartesischen Koordinatensystems; das Magnetfeld deute senkrecht dazu in die z -Richtung. Der Adiabatenindex sei $\gamma = 2$.

Als Randbedingungen wählen wir an der sonnenseitigen Randfläche die Parameter des ungestörten Sonnenwinds. Je nach verwendetem Gitter legen wir diese Fläche in anderthalb- bis zweifachen Bugstoßwellenabstand R_B nach Gl.(2.4) vor den Kometenkern. Da auf allen anderen Randflächen die Geschwindigkeiten aus den Randvolumina herausgerichtet sind, sind die Randwerte hier die Größen des nächstinneren Gitterpunktes. Die Ausdehnung des Gitters in diesen Richtungen variiert von Modell zu Modell und wird individuell angegeben werden.

Startmodell ist der Zustand des ungestörten Sonnenwinds. Zur Zeit $t = 0$ werde die Ionenquelle des Kometen plötzlich "eingeschaltet", der stationäre Zustand wird in der Modellzeit ungefähr zwölf Stunden später erreicht.

Zur Kometensimulation werden drei unterschiedliche Gitter verwendet:

A.) Das in dem Bild 3.2 illustrierte MULTIGRID mit vier Verfeinerungen. Wir lösen damit etwa $10^4 km$ in der Umgebung des Kometenkerns auf. Wir verwenden 33 Stützstellen in jeder der drei Raumrichtungen. Das Gitter erstreckt sich von $-1.5 \cdot 10^6$ bis $4.5 \cdot 10^6 km$ in Strömungsrichtung des Sonnenwinds, von $-2.25 \cdot 10^6$ bis $+2.25 \cdot 10^6 km$ in den Richtungen senkrecht dazu.

B.) Ein äquidistantes Gitter mit 50 Stützstellen in jeder der drei Raumrichtungen. Es löst die Gebiete in größerer Entfernung vom Kometenkern, z.B. die Bugstoßwelle, am besten auf. Die Verbindungslinie Sonne-Komet wird im Gegensatz zum MULTIGRID in diesem Gitter ausgespart und eine Mittelung nach Gl.(3.51) ist nicht nötig. Das Gitter hat eine Ausdehnung von $2.4 \cdot 10^6 km$ in jeder der drei Richtungen, der Komet sitze im Ursprung. Die wesentlichen Charakteristika des kometaren Plasmas werden in diesem Gitter am deutlichsten. Falls nicht anders angegeben, werden wir im vorliegenden Abschnitt dieses Modell zeigen.

C.) Ein nichtäquidistantes Gitter nach Bild 3.1 mit 32 Stützstellen in jeder Raumrichtung. Es reicht bis zu einem Abstand von $2500 km$ an den Kern heran, die Auflösung in größerer Entfernung ist dafür umso schlechter. Wir verwenden dieses Modell, um die physikalischen Bedingungen im Stagnationsbereich zu ermitteln. Das Gitter ist wie in B.) dimensioniert, die Verbindungslinie Sonne-Komet wird wiederum ausgespart.

Da wir die physikalischen Größen des Kometenmodells graphisch nicht dreidimensional darstellen können, werden wir sie auf drei Schnitten durch unser Modell

zeigen:

1.) In der "Äquatorebene", deren Flächennormale senkrecht zur Sonnenwindströmung und parallel zum IMF sei. Der Kern des Kometen liege im Ursprung der Ebene.

2.) In der "IMF-Ebene", deren Flächennormale senkrecht zu Sonnenwindströmung und IMF sei. Der Kern des Kometen ist zugleich Ursprung der Fläche und Schnittpunkt mit der Äquatorebene. Da bei den Gittern B.) und C.) der Kern zwischen den Gitterpunkten liegt, werden dort Äquator- und IMF-Ebene als die der Ebene durch den Kern nächsten Gitterebenen verstanden.

3.) Als "Querschnittsebenen" definieren wir Schnitte mit einer Flächennormalen parallel zur Sonnenwindströmung bei gegebenem Abstand vom Kometenkern.

5.1.1. STRUKTUR DES KOMETAREN PLASMAS

Wir wollen nun die Ergebnisse der Kometensimulationen der Reihe nach vorstellen.

Im Bild 5.1 ist die Dichteverteilung des kometaren Plasmas in der IMF-Ebene dargestellt. Wir finden dort Massendichte, Teilchenzahldichten von kometaren Ionen, solaren Protonen und Elektronen, die nach Gln.(3.44,3.45,3.46) berechnet wurden, und Linien gleichen mittleren Molekulargewichts μ von Ionen und Elektronen. Die zugehörige Ionenmasse ist bei Vernachlässigung der Elektronen gegenüber der Ionenmasse gleich 2μ . In unmittelbarer Umgebung des Kometenkerns wird der Hauptteil der Masse des Plasmas von den kometaren Ionen getragen. Hier beträgt das mittlere Ionengewicht $19.8 m_p$ und ist praktisch gleich der kometaren Ionenmasse von $20 m_p$. Die Teilchenzahldichte der Ionen ist 550 cm^{-3} und die Massendichte beträgt etwa $10^4 m_p \text{ cm}^{-3}$. Die Dichte der Protonen aus dem solaren Wind ist mit 30 cm^{-3} relativ gering. Verglichen mit der Dichte des ungestörten Sonnenwindes, $n_\odot = 5 \text{ cm}^{-3}$, werden die Protonen um ungefähr einen Faktor sechs komprimiert. Die hohe Dichte im Stagnationsbereich wird daher weniger durch die Kompression des Sonnenwinds vor dem Kern des Kometen, aber ganz entscheidend durch die Anreicherung des Plasmas mit kometaren Ionen verursacht. Die Linienstrahlung dieser Ionen ist für die visuelle Erscheinung des Kometen verantwortlich.

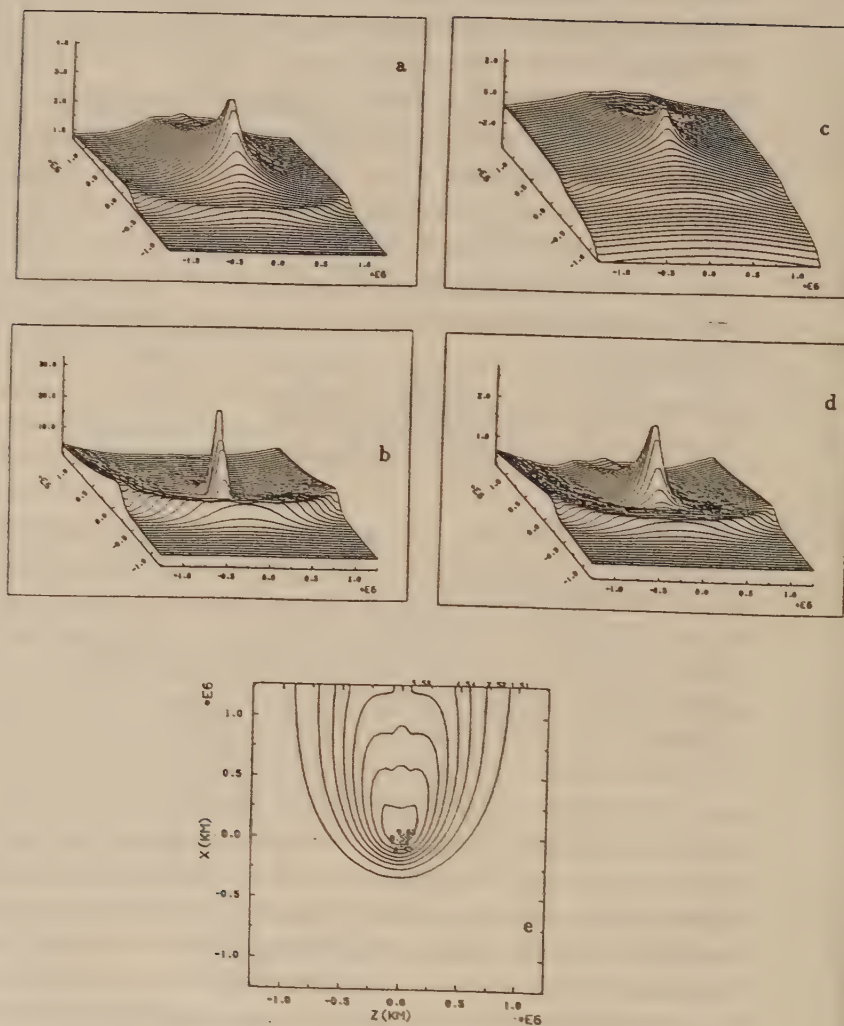


Abb. 5.1: Plasmadichte in der IMF-Ebene. (a) Massendichte logarithmisch in $m_p \text{ cm}^{-3}$, (b) Protonendichte, (c) kometare Ionendichte (logarithmisch), (d) Elektronendichte logarithmisch in cm^{-3} ; (e) zeigt Linien gleichen mittleren Molekulargewichts. Die Längeneinheit ist km.

Aus der Richtung der Sonne kommend wird ungefähr $6.4 \cdot 10^5 \text{ km}$ vor dem Kern eine Bugstoßwelle ausgebildet. Man erkennt sie an einem Sprung der Teilchenzahldichten, besonders der Protonen und Elektronen: Durch den Stoß werden die Teilchen des solaren Windes komprimiert, während die kometaren Ionen entsprechend Gl.(2.1) nur einen winzigen Bruchteil (Größenordnung Prozent) zur Teilchenzahldichte beitragen. Aus Gl.(2.4) erhalten wir einen genäherten Abstand der Bugstoßwelle vom Kern von $6.28 \cdot 10^5 \text{ km}$; er gilt für den planparallelen Stoß und stellt eine untere Grenze dar. Die gute Übereinstimmung der beiden Ergebnisse zeigt aber, daß die Bugstoßwelle auf der Verbindungslinie von Sonne und Komet in guter Näherung planparallele Eigenschaften hat. Das mittlere Molekulargewicht am Stoß ist $\mu = 0.6$ und damit etwas geringer als das von dem eindimensionalen Modell von Biermann et al. (1967) maximal erlaubte $\mu = \frac{2}{3}$. $\mu = 0.6$ ist in guter Übereinstimmung mit den hydrodynamischen Rechnungen von Schmidt und Wegmann (1982).

Hinter dem Stoß nimmt die Teilchenzahldichte von Protonen und Elektronen wieder geringfügig ab, da das Plasma durch den Stoß abgelenkt wird und den Kometen umströmt, was in dem Bild 5.2 demonstriert ist. Wir finden dort die Geschwindigkeitsvektoren in der IMF-Ebene. Die Bugstoßwelle ist wieder deutlich an der starken Abbremsung des Plasmas zu erkennen, das dann nach dem Stoß um den Kometen herumfließt. In der Nähe des Kerns wird die Geschwindigkeit minimal, und schließlich stagniert die Strömung, was jedoch bei dieser Rechnung nicht aufgelöst ist. Im Schweif nehmen die Geschwindigkeiten wieder zu, wodurch das Plasma der Kontinuitätsgleichung gemäß wieder dünner wird.

In dem Bild 5.3 sind der thermische Druck p und die Ionentemperatur

$$T_i = \frac{p(2\mu m_p - m_e)}{\rho k}$$

in der IMF-Ebene dargestellt. Wieder deutlich zu erkennen ist die Bugstoßwelle, an der ein großer Teil der kinetischen Energie der Protonen des solaren Winds, die nach Bild 5.1 hier dominieren, in thermische Energie umgesetzt wird. Dabei werden die Protonen auf koronale Temperaturen von einigen Millionen K aufgeheizt. Durch die Umströmung des Kometen geht die Teilchenzahldichte hinter dem Stoß nochmals geringfügig zurück, was dazu führt, daß die Temperatur ihr Maximum von etwa $5 \cdot 10^6 \text{ K}$ erst nach etwa der halben Entfernung zwischen Stoß und Komete-

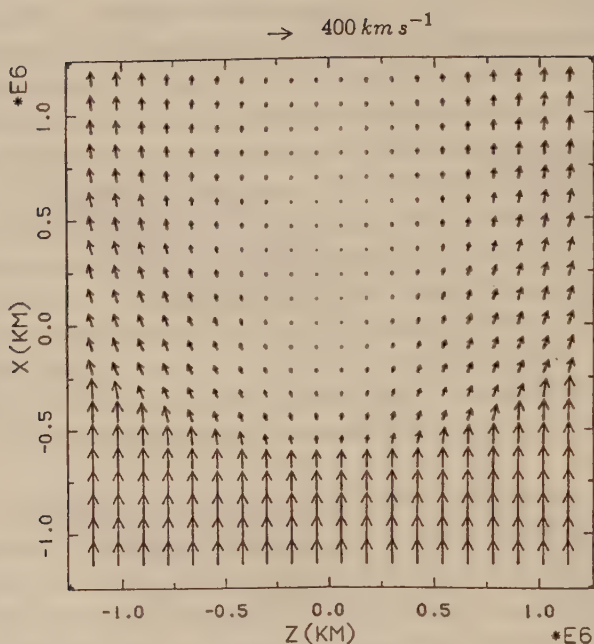


Abb. 5.2: Vektoren des Geschwindigkeitsfeldes in der IMF-Ebene.

tenkern erreicht und nicht schon direkt hinter dem Stoß. Erst wenn die kometaren Ionen zahlenmäßig ins Gewicht fallen, nimmt die Teilchenzahldichte wieder zu. Die Temperatur fällt dann in Richtung des Kerns immer weiter ab, da sich die thermalisierte kinetische Energie des Sonnenwindes auf immer mehr Teilchen verteilen muß. Im Bereich der Stagnation erreicht die Temperatur ihr Minimum von etwa $2 \cdot 10^4 \text{ K}$ und der Druck seinen Maximalwert von ungefähr $1.6 \cdot 10^{-8} \text{ dyn cm}^{-2}$, was ungefähr das 1.4-fache des hydrodynamischen Stagnationsdruckes $0.84 \rho_{\odot} v_{\odot}^2$ ist. Magnetischer und thermischer Druck zusammen sind etwa doppelt so groß wie dieser Wert, was mit den Ergebnissen von Schmidt und Wegmann (1982) übereinstimmt. Dieser Maximalwert ist in dem Bild 5.3 nicht angegeben. Die innerste Isobare entspricht einem Druck von $7.6 \cdot 10^{-9} \text{ dyn cm}^{-2}$ und ist etwa halb so

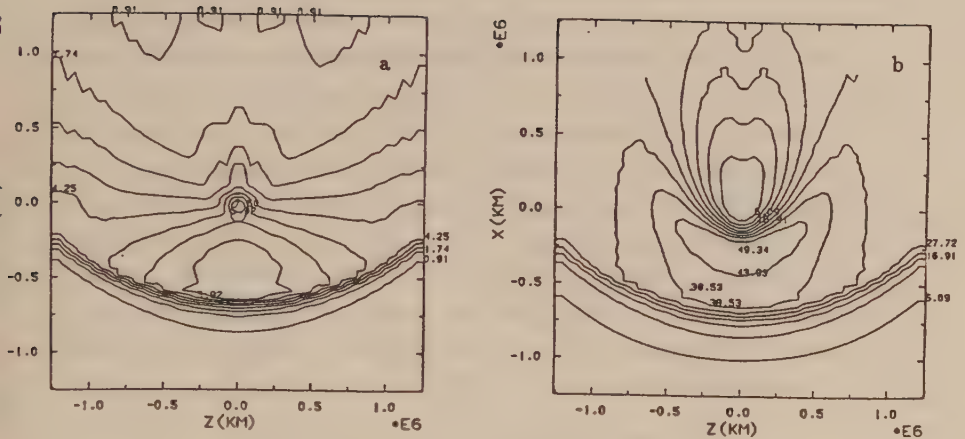


Abb. 5.3: Thermischer Druck in $10^{-9} \text{ dyn cm}^{-2}$ (a) und Ionentemperatur in 10^5 K in der IMF-Ebene (b).

groß wie der Maximalwert. Die hohen Drücke von der Größenordnung des Stagnationsdruckes beschränken sich auf einen ganz engen Bereich von einigen 10^3 km Abstand vom Kern. Hinter dem Kometenkern im Schweif nehmen Druck und Dichte ab, die Temperaturen wieder zu.

Das Bild 5.4 demonstriert, wie das Magnetfeld den Kometen umhüllt. Dargestellt sind die Feldvektoren in der IMF-Ebene. Wir sehen das gröbste (a) und das feinste (b) Gitter des MULTIGRID. Die Dimensionen des feinsten Gitters mit vierfacher Verfeinerung sind in Bild a angedeutet. Die Magnetfeldkomponente senkrecht zur IMF-Ebene ist durchweg kleiner als 0.5 nT und damit zu vernachlässigen; wir erkennen daran, wie asymmetrisch das Magnetfeld im kometaren Plasma ist.

Die wesentlichen Strukturen des Feldes folgen bereits aus dem Bild 5.4a. Das Magnetfeld umhüllt den Kometenkern, wodurch im Schweif ober- und unterhalb der Äquatorebene zwei Gebiete unterschiedlicher Polarität entstehen; in der Ebene verschwindet das Feld. In der Nähe des Kerns wird das Feld maximal komprimiert. In dem groben Gitter ist die Maximalfeldstärke 21 nT , in dem besser aufgelösten Gitter von Bild 5.4b 33 nT . Die Simulation mit dem nichtäquidistanten Gitter

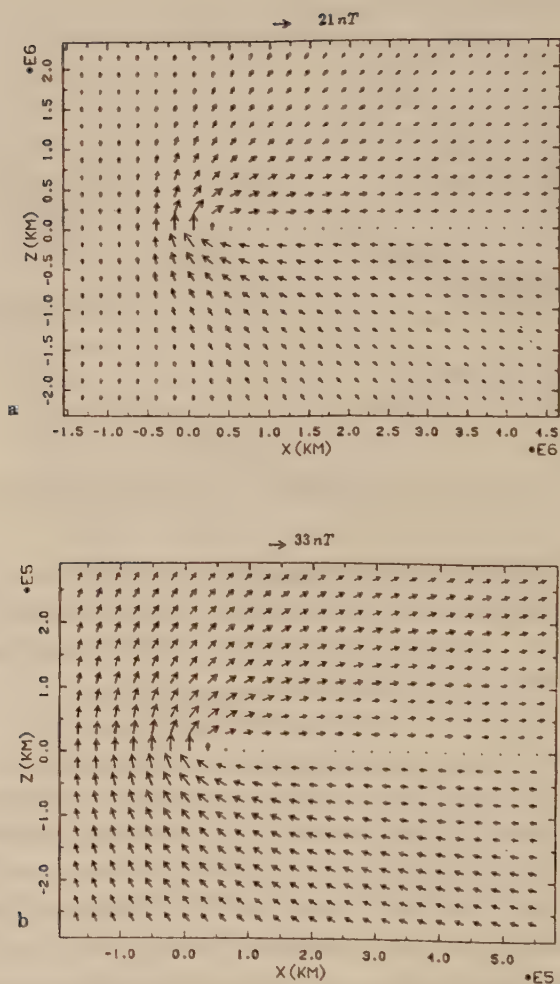


Abb. 5.4: Vektoren des magnetischen Feldes in der IMF-Ebene, (a) größtes Gitter, (b) feinstes Gitter des MULTIGRID. Die Größe des Gitters (b) ist in (a) mit eingezeichnet. Die Einheit der Achsen sind km.

ergibt 40 nT . In diesem Modell fällt das Feld zur Kontaktdiskontinuität hin wieder ab, das Maximum können wir daher als aufgelöst betrachten. Die 40 nT sind in guter Übereinstimmung mit Schmidt und Wegmann (1982), die 43 nT finden.

Das Bild 5.4 zeigt eine wichtige Eigenschaft des Programms und des MULTIGRIDS. Da wir die Kontaktfläche bei dieser Simulation nicht auflösen, wird durch die Verschmierung des Quellterms am Ort des Kometenkerns über das innerste Volumen gemäß Gl.(3.51) auch das Feld über eine Gitterzelle in den Schweif hineintransportiert bevor es zwischen den Gebieten unterschiedlicher Polarität praktisch auf Null zurückgeht. Da der Quellterm in den feineren Gittern auch über kleinere Volumina verschmiert wird, hat er in allen Gittern relativ zum Abstand der Stützstellen dieselben Eigenschaften. Um diese geringe "Diffusion" des Feldes in den Schweif zu verhindern, muß man die Kontaktfläche auflösen.

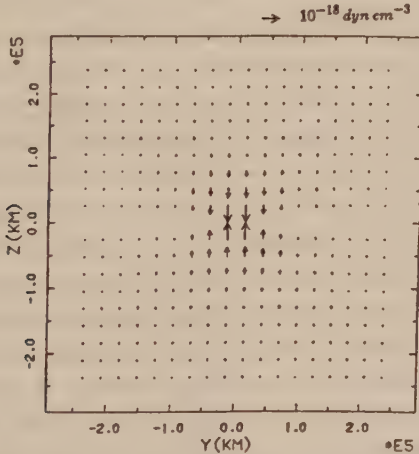


Abb. 5.5: Vektoren des magnetischen Krümmungskraftfeldes in einer Querschnittsebene $2.4 \cdot 10^4 \text{ km}$ in solarer Richtung vor dem Kern.

Mit dem Magnetfeld sind zwei Arten von magnetischen Kräften verbunden, die magnetische Druckkraft $\frac{1}{8\pi} \vec{\nabla} \vec{B}^2$ und die magnetische Krümmungskraft $\frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$, die die Feldlinien zu verkürzen versucht. Als gesamte Druckkraft ist in der Bewegungsgleichung die Summe der Gradienten von thermischem und magne-

tischem Druck entscheidend. Aus den Rechnungen folgt, daß dieser Gesamtdruck praktisch unabhängig vom Azimut des Aufpunkts im Schweif ist. Diese Eigenschaft haben bereits Schmidt und Wegmann (1982) festgestellt; sie wird im folgenden Kapitel im Bild 6.11 noch gezeigt werden. Die magnetischen Druckkräfte allein würden daher den Kometen azimutal symmetrisch erscheinen lassen; Asymmetrien werden allein durch magnetische Krümmungskräfte verursacht. In dem Bild 5.5 sind die Vektoren des Krümmungskraftfeldes in einer Querschnittsebene $2.4 \cdot 10^4 \text{ km}$ vor dem Kern dargestellt. Die Kraftkomponente in antisolarer Richtung ist von derselben Größenordnung wie die auf die Äquatorebene hin gerichtete. Die magnetischen Kräfte sind nur in einem Bereich von etwa 10^5 km in solarer Richtung vor dem Kern wirksam, besonders stark werden sie in den innersten $4 \cdot 10^4 \text{ km}$. Bild 5.5 zeigt, daß die Krümmung des Feldes die Materie zur Äquatorebene hin konzentriert.

Durch die magnetischen Krümmungskräfte wird das Plasma im Schweif asymmetrisch, was in dem Bild 5.6 veranschaulicht ist. Dort sind die Vektoren des Geschwindigkeitsfeldes und die Linien gleicher Dichte in einer Querschnittsebene $1.6 \cdot 10^6 \text{ km}$ hinter dem Kern dargestellt. Das Magnetfeld des ungestörten Sonnenwinds deutet in Richtung der z -Achse. Zum Vergleich wurde auch ein hydrodynamisches Modell mit $B_{\odot} = 0$ beigefügt. In diesem strömt das Plasma in alle Richtungen symmetrisch von der Schweifachse ab und die Dichte ist auch symmetrisch bezüglich des Azimuts des Aufpunkts im Schweif. Die nach außen gerichtete Bewegung ist eine Folge der Umströmung des Kometen durch das Sonnenwindplasma. Da die magnetischen Krümmungskräfte auf die Äquatorebene zu gerichtet sind (Bild 5.5), entstehen symmetrisch zur Äquatorebene zwei Pole im Geschwindigkeitsfeld (Bild *d*), an denen das Abströmen in eine einwärtsgerichtete Bewegung umgekehrt wird. Das Plasma strömt dann vorzugsweise in der Äquatorebene ab und es entsteht das Strömungsmuster vom Bild 5.6d: Der Schweif plattet ab, was man an den Linien gleicher Dichte in dem Bild 5.6b erkennt. Da die Einwärtsbewegung am stärksten auf der Verbindungslinie zwischen den Polen des Geschwindigkeitsfeldes ist, d.h. in der Richtung des ungestörten Magnetfeldes des Sonnenwinds, wird der Schweif hier am stärksten eingedrückt. Es entsteht eine "Hantel-förmige" Struktur.

Bis in eine Entfernung von etwa $1.5 \cdot 10^6 \text{ km}$ von Kern nimmt die Abplattung des

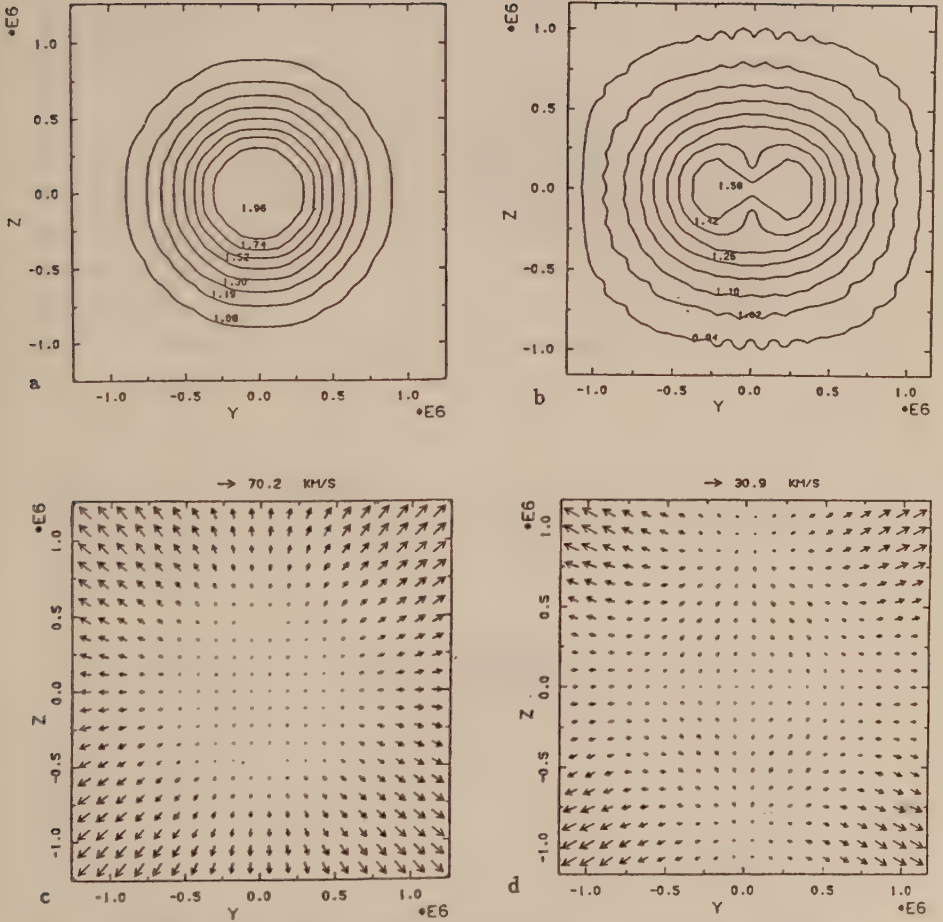


Abb. 5.6: Linien gleicher Massendichte (a,b) und Vektoren des Geschwindigkeitsfeldes (c,d) in einem Schnitt durch den Schweif $1.6 \cdot 10^6 \text{ km}$ hinter dem Kometenkern. Die Dichte ist logarithmisch in $m_p \text{ cm}^{-3}$ angegeben. (a) und (c) zeigen ein Modell mit $B_\odot = 0$, (b) und (d) das bisher diskutierte Modell mit $B_\odot = 5 \cdot 10^{-5} \text{ nT}$.

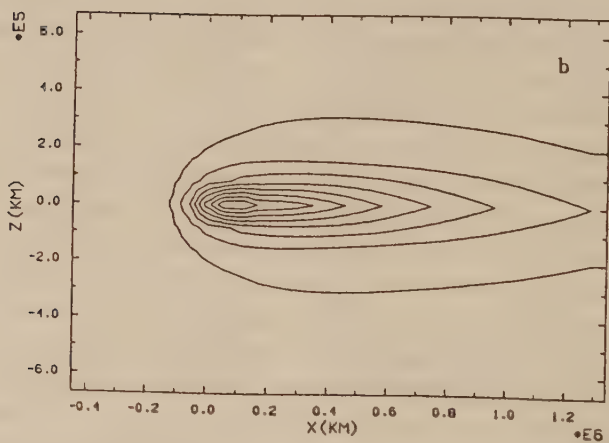
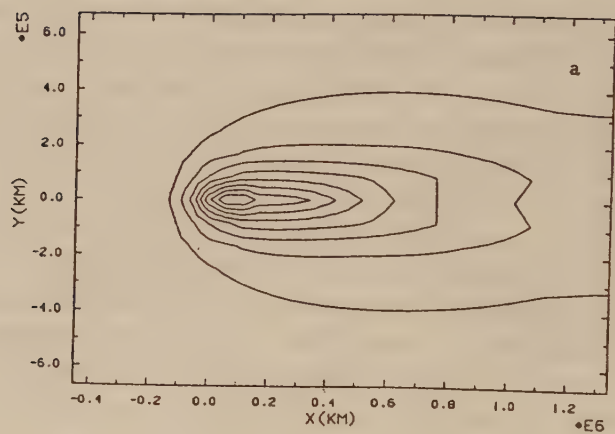


Abb. 5.7: Isophotenkarten in der Äquatorebene (a) und in der IMF Ebene (b). Die Isophoten sind auf ein Maximum von $2.82 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ (a) und $2.34 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ (b) normierte integrierte Säulendichten der kometaren Ionen. Die innerste Isophote hat die zehnfache Intensität der äußersten.

Schweif mit der Entfernung vom Kometenkern praktisch linear zu. Bei größeren Entfernungen bleibt sie dann konstant und entspricht der in Bild 5.6 gezeigten Konfiguration. Wir werden das im folgenden Abschnitt im Zusammenhang mit der Abhängigkeit der Abplattung von der Gasproduktionsrate noch begründen. Durch die Abplattung nimmt der Schweif eine bandartige Form an, so daß er Beobachtern, die aus verschiedenen Richtungen schauen, mit unterschiedlicher Intensität und Dicke erscheint. Das kann man dem Bild 5.7 entnehmen. Dort sind zwei Isophotenkarten dargestellt, die eine mit Aufsicht auf die Äquatorebene (a), die andere auf die IMF-Ebene (b). Da das kometare Plasma in den visuellen Moleküllinien optisch dünn ist, berechnen wir die Isophoten als Säulendichten der kometaren Ionen. Mit $n_c(\vec{x}) = n_c(x, y, z)$ aus Gl.(3.44) gilt daher beispielsweise für die XY-Ebene, die in unserem Modell die Äquatorebene ist:

$$I(x, y) = \int n_c(x, y, z) dz, \quad (5.1)$$

wobei im Bild 5.7 auf das Maximum am Ort des Kometenkerns normiert wurde. Die relativen Intensitätsverhältnisse entsprechen also in etwa dem, was ein Beobachter im visuellen sehen würde. Die unterschiedliche Dicke des Schweifs ist deutlich zu erkennen. In der Aufsicht auf die IMF-Ebene ist der Schweif um etwa 20% heller als senkrecht dazu.

Die Asymmetrien, die durch die magnetischen Krümmungskräfte verursacht werden, wirken sich auch auf den thermischen Druck im Schweif aus. In dem Bild 5.8 werden Schnitte durch ein Modell gezeigt, bei dem abgesehen von der Ionenmasse $m_c = 30 m_p$ die Parameter des oben diskutierten Modells verwendet wurden. Auf Kosten der Auflösung im Stagnationsbereich wurde ein größerer Teil des Schweifs berechnet; das größte Gitter eines MULTIGRIDS mit 33 Stützstellen in Richtung Sonne-Komet und je 17 Stützstellen in den dazu senkrechten Richtungen wird gezeigt. Wie bereits oben besprochen wird die Materie zur Äquatorebene hin konzentriert, wodurch die Differenz der thermischen Drücke von Bereichen nahe und fern der Schweifachse in der IMF-Ebene besonders groß wird. Dort hat der thermische Druck daher ein ausgeprägtes Maximum auf der Schweifachse. Im Gegensatz dazu ist er in der Äquatorebene in radialer Richtung ungefähr konstant. Wir erkennen, daß die magnetischen Krümmungskräfte eine bedeutende Rolle für die Dynamik des Kometen spielen.

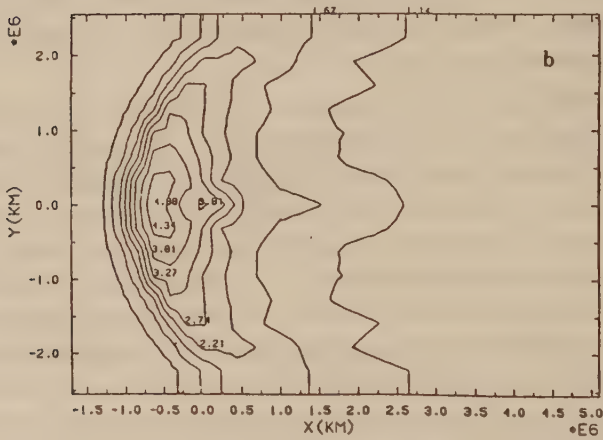
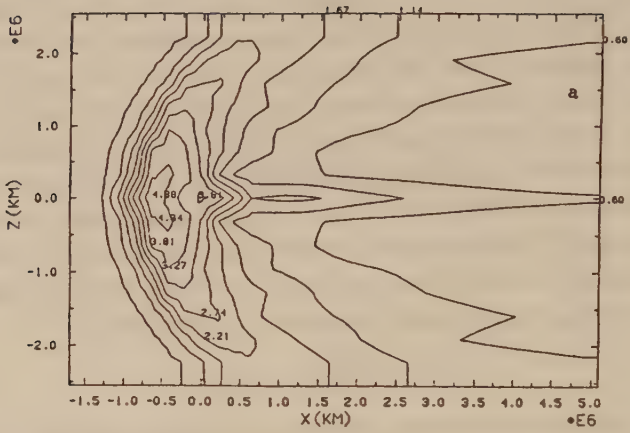


Abb. 5.8: Der thermische Druck bei einem Modell, bei dem ein größerer Bereich des Schweifs mitgerechnet wurde. (a) zeigt die IMF-Ebene, (b) die Äquatorebene.

5.1.2. ABHÄNGIGKEIT VON DER GASPRODUKTION DES KOMETEN

Wir hatten bereits bei der Abschätzung des Abstands der Bugstoßwelle vom Kometenkern in Gl.(2.5) gesehen, daß die Dimensionen des Kometen linear mit der Gasproduktion ansteigen, soweit $R_B \ll v_c/\sigma$ ist, was bei den dort verwendeten charakteristischen Parametern für $G \lesssim 10^{29} \text{ s}^{-1}$ der Fall ist. Wir hatten daher zwischen "linearen" und "nichtlinearen" Kometen unterschieden. Unsere Modellrechnungen mit verschiedenen Produktionsraten zeigen nun, daß lineare und nichtlineare Kometen auch ein unterschiedliches Strömungsverhalten zeigen. Die Eigenschaften der linearen Kometen sind in auf den Abstand der Bugstoßwelle normierten Koordinaten praktisch identisch, was wir leicht verstehen können, wenn wir berücksichtigen, daß außerhalb des Stagnationsbereiches der Einfluß der Massenquelle in der Wechselwirkung von Sonnenwind und Komet dominiert; wir hatten das im Abschnitt 2.3 begründet. Für unsere Untersuchungen genügt daher die Betrachtung der Kontinuitätsgleichung. Sie lautet in dimensionslosen Koordinaten $\tilde{x} = x\sigma/v_c$ mit dimensionslosen Variablen $\rho^* = \rho/\rho_\odot$ und $\tilde{v}^* = \tilde{v}/v_\odot$ mit dem Quellterm Gl.(2.3):

$$(\vec{\nabla}_{\tilde{x}} \cdot \rho^* \tilde{v}^*) = \left(\frac{Gm_c \sigma^2}{4\pi v_c^2 \rho_\odot v_\odot} \right) \frac{1}{\xi^2} e^{-\xi}. \quad (5.2)$$

Es haben also alle Modelle, bei denen der Parameter

$$\Pi = \frac{Gm_c \sigma^2}{4\pi v_c^2 \rho_\odot v_\odot} \quad (5.3)$$

konstant ist in einem auf σ/v_c normierten Gitter dasselbe Strömungsverhalten. Π ist gerade das Verhältnis des Flusses aller kometaren Moleküle $Gm_c/4\pi v_c R_i^2$ (neutral und ionisiert) in der Entfernung der typischen Ionisationslänge $R_i = v_c/\sigma$ vom Kern zu dem der solaren Protonen $\rho_\odot v_\odot$. Bei der Unterscheidung von linearen und nichtlinearen Kometen müssen wir zwei Dinge beachten. Zum einen ist bei den linearen Kometen per definitionem $R_B \ll R_i$, zum anderen können wir, sofern wir nicht allzuweit vom Kometenkern entfernte Bereiche betrachten, den Erschöpfungsfaktor der Ionenquelle $e^{-\xi}$ in Gl. (5.2) durch $1 - \xi$ abschätzen. Verwenden wir als Normierungslänge für den Abstand R_B die Abschätzung Gl.(2.5) für lineare Kometen, so gilt $\Pi = R_B/[R_i(\gamma^2 - 1)]$. Transformieren wir Gl. (5.2) erneut in Koordinaten $\tilde{\eta} = \tilde{x}/R_B$, so folgt unter Berücksichtigung von $\xi \ll 1$:

$$(\vec{\nabla}_{\tilde{\eta}} \cdot \rho^* \tilde{v}^*) \simeq \frac{1}{\gamma^2 - 1} \eta^{-2} \left(1 - \eta \frac{R_B}{R_i} \right). \quad (5.4)$$

Das bestätigt unser numerisches Ergebnis, daß die Strömungseigenschaften der linearen Kometen in auf den Bugstoßwellenabstand normierten Koordinaten praktisch identisch sind, allerdings mit der Einschränkung, daß wir Bereiche betrachten, in denen der Abstand vom Kern klein gegen die Ionisationslängenskala R_i ist. In der Koma gilt das bei linearen Kometen immer, bei nichtlinearen über weite Bereiche; im Schweif hingegen ist die Ähnlichkeit nicht so allgemein auf R_B zu normieren, da hier wegen der Länge des Schweifs der Abstand vom Kern größer als die Ionisationslängenskala sein kann. In unseren Simulationen berücksichtigen wir eine Ausdehnung des Schweifes bis zu $6 R_B$. Wir werden im folgenden beim Vergleich von Modellen mit unterschiedlicher Gasproduktionsrate auf den Bugstoßwellenabstand normieren, da er - auch nicht zuletzt von der Anschauung her - eine relative Skalierung der verschieden großen Kometen ermöglicht. Im übrigen können wir dann auch zwischen Linearität und Nichtlinearität der Kometen unterscheiden: Bei den nichtlinearen Kometen wächst das Volumen nicht mehr so stark mit der Produktionsrate wie bei den linearen, so daß das Plasma in den relativ zu R_B normierten Koordinaten bei den nichtlinearen Kometen dichter, und die Koma ausgedehnter ist; relativ zur Bugstoßwelle wird das Plasma langsamer und dichter, was schon den Rechnungen von Schmidt und Wegmann (1982) zu entnehmen ist.

Wesentliche Unterschiede zwischen linearen und nichtlinearen Kometen finden wir aber im Schweif: Mit wachsender Gasproduktionsrate nimmt die Abplattung in auf den Bugstoßwellenabstand normierten Koordinaten zu, was in dem Bild 5.9 dargestellt ist. Gezeigt ist das größte Gitter eines mit 33 Stützstellen in der Komet-Sonne Richtung und je 17 senkrecht dazu aufgelösten MULTIGRIDS. Die Abbildung zeigt die Linien gleicher Dichte auf Querschnittsebenen bei konstantem $\eta = 2.75$ für Kometen mit Produktionsraten von 10^{28} , 10^{29} und 10^{30} s^{-1} . In den relativen Einheiten η ist in jedem Diagramm der Bereich von $\eta = -4$ bis $\eta = 4$ dargestellt. Im übrigen wurden die Parameter des Modells von Bild 5.8 verwendet. Die Wirkung der magnetischen Krümmungskräfte wurde durch die Pole im Geschwindigkeitsfeld mit $\times$ markiert. Mit wachsender Produktionsrate wandern sie in den relativen Einheiten η etwas nach außen, weil bei den nichtlinearen Kometen die dichtere Koma relativ größer ist, was bei der Umströmung des Kometen zu einem in radialer Entfernung von der Schweifachse ausgedehnteren Schweif führt.

Für die stärkere Abplattung der nichtlinearen Kometen ist die im Vergleich

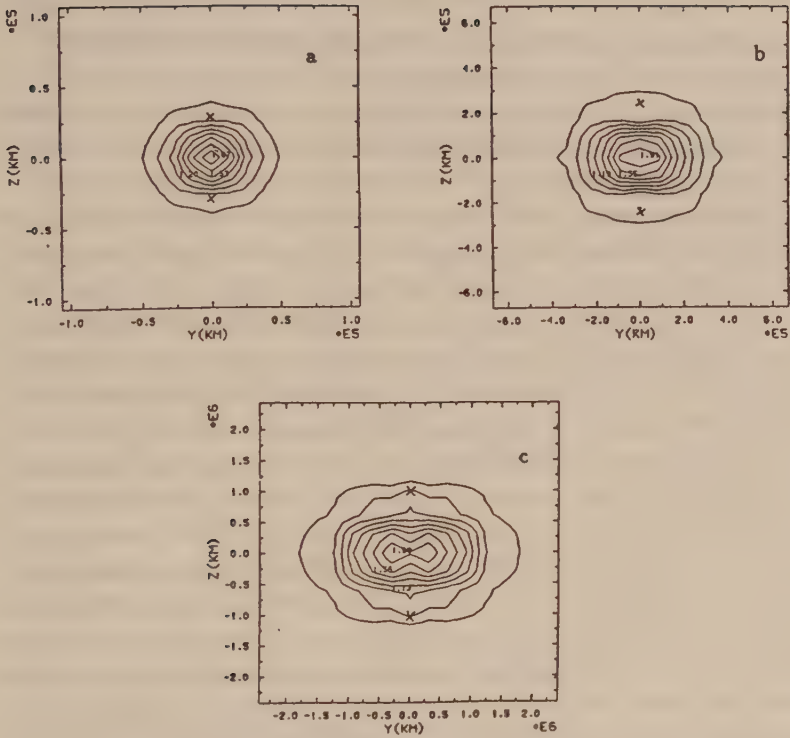


Abb. 5.9: Darstellung der Dichtekonturen in einer Querschnittsebene mit verschiedenen Gasproduktionsraten des Kometen, aber bei festem $\eta_x = x/R_B = 2.75$. Modell (a) hat $G = 10^{28} \text{ s}^{-1}$, (b) hat $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ und (c) hat $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$. Die Pole im Geschwindigkeitsfeld sind durch Kreuze markiert. In den relativen Einheiten η umfassen alle Modelle denselben Bereich von $\eta = -4$ bis $\eta = 4$.

zu den linearen Kometen geringere Produktion kometarer Ionen im Schwefel verantwortlich. Bei dem nichtlinearen Modell mit $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$ befindet sich die im Bild 5.9 gezeigte Ebene in einer Entfernung $2.75 R_B \approx 2.2 \cdot 10^6 \text{ km}$ hinter dem Kometen. Bei dem linearen Modell mit $G = 10^{28} \text{ s}^{-1}$ ist die entsprechende Ausdehnung nur 10^5 km und damit sehr viel kleiner als die Längenskala für Ionisation von

10^6 km. Als Folge ist die Produktion kometarer Ionen bei den nichtlinearen Kometen im Vergleich zu den linearen in den relativen Koordinaten zu vernachlässigen. Die Bilder 6.15 und 6.16 werden später noch demonstrieren, daß der Druck im Schweif bei Abständen vom Kern, die kleiner als die Ionisationslänge sind, im wesentlichen von dem Massenproduktionsterm kometarer Ionen bestimmt wird. Das führt dazu, daß bei den linearen Kometen durch den zusätzlichen Druck der neu entstandenen Ionen, den sie im wesentlichen aus der kinetischen Energie der abströmenden Teilchen gewinnen, das Plasma nicht so effektiv von den magnetischen Krümmungskräften in Richtung der Äquatorebene beschleunigt werden kann wie bei den nichtlinearen. Das Gleichgewicht zwischen dem Gesamtdruck und den magnetischen Krümmungskräften wird schon in einem relativ größeren Abstand von der Schweifachse erreicht: Die Schweife linearer Kometen sind weniger abgeplattet wie die der nichtlinearen. Jetzt können wir auch besser verstehen, warum, wie im vorigen Abschnitt berichtet, die Abplattung des Schweifs zunächst mit der antisolaren Entfernung vom Kometenkern zunimmt, und dann konstant bleibt. Der Grund ist auch dort die Abnahme der lokalen Produktionsrate kometarer Ionen über die Ionisationslängenskala $R_i \simeq 10^6$ km: Mit dem Abstand vom Kometenkern erschöpft sich das Neutralgas immer mehr, so daß auch der Anteil des Drucks im Schweif, der von diesen Ionen erzeugt wird, geringer wird und bei Abständen, die die Ionisationslänge übertreffen schließlich zu vernachlässigen ist. Entsprechend nimmt die Abplattung mit dem abnehmenden Partialdruck der neu entstandenen Ionen zu und ist bei $r \gtrsim R_i$ praktisch vernachlässigbar, in völliger Übereinstimmung mit den numerischen Resultaten. Die "Hantelstruktur", die wir bei den nichtlinearen Kometen gefunden haben, ist bei den linearen nicht zu erkennen: Das Plasma umfließt hier beim Abströmen in die Äquatorebene wegen des zusätzlichen Drucks der neuen Ionen einen weiteren Bereich und kann den zentralen Schweif nicht genügend komprimieren.

5.1.3. VERGLEICH MIT ANDEREN AUTOREN

Wir wollen schließlich unsere Modelle mit anderen Simulationen des kometa- ren Plasmas vergleichen. Wir hatten bereits gesehen, daß der Abstand der Bug- stoßwelle vom Kometenkern, das mittlere Molekulargewicht am Stoß, sowie die physikalischen Größen im Stagnationsbereich in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Schmidt und Wegmann (1982) sind. Eine Differenz zwischen den Rechnungen finden wir direkt hinter der Bugstoßwelle. In unserer Rechnung, zu- mindest bei genügender Auflösung dieses kernfernen Bereichs in dem Gitter mit 50 Stützstellen in jeder Raumrichtung, wird das im Stoß komprimierte Plasma stärker um den Komet herum abgelenkt, wodurch es zu einer Abnahme der Teil- chenzahldichte (Bild 5.1) kommt, der thermische Druck wegen der Expansion des Gases abnimmt und die in Bild 5.3 gezeigte Struktur annimmt. Die Differenz zwischen den Rechnungen scheint ein Auflösungseffekt zu sein. Auch unser Pro- gramm liefert bei geringerer Auflösung im Bereich der Bugstoßwelle eine geringere Ablenkung des Plasmas um den Kern, weil der Stoß über einen größeren Bereich "ausgeschmiert" wird. Die hohe Auflösung von 50^3 äquidistanten Stützstellen führt zu einer stärkeren Ablenkung als bei Schmidt und Wegmann. Bei gerin- gerer Auflösung wird auch in unseren Simulationen die Ablenkung des Plasmas hinter dem Stoß geringer und eine Abnahme der Protonendichte ist nicht mehr zu erkennen. Die Rechnungen sind dann praktisch identisch.

Die Abplattung des Schweifs wird von beiden Autoren in ähnlicher Weise be- schrieben, lediglich finden Schmidt und Wegmann (1982) nicht die Hantelstruktur von Bild 5.6 und Bild 5.9, sondern vielmehr eine kleine "Nase" an der Symmetrie- achse unserer Hantel parallel zum IMF.

Eine Abbildung aus ihren Rechnungen findet man im Bild 5.10. Die Differen- zen hängen sicherlich mit den Details der Magnetfeldstruktur zusammen. Dabei spielen möglicherweise die numerischen Fehler bei der Erfüllung von $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ bei Schmidt und Wegmann eine Rolle; die Fehler sind nämlich im Stagnationsbe- reich und in der Nähe der Schweifachse besonders groß, was wir in dem Bild 1.4 demonstriert haben. Diese Gebiete sind aber gerade für die Abplattung verant- wortlich.

Der Vergleich mit den Rechnungen von Fedder et al. (1983) gestaltet sich

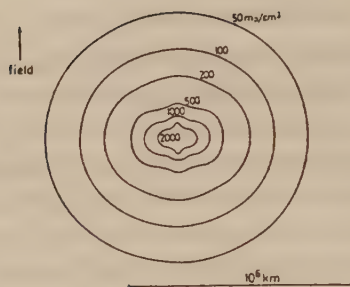


Abb. 5.10: Linien gleicher Dichte für ein Modell mit $G = 2 \cdot 10^{30} \text{ s}^{-1}$ in einer Querschnittsebene $8 \cdot 10^5 \text{ km}$ hinter dem Kometenkern aus Schmidt und Wegmann (1980). Die Masse der Ionen in dieser Rechnung ist $m_c = 23.3 m_p$. Im übrigen gleichen die Modellparameter denen unserer Modelle.

schwieriger, da die Ergebnisse bisher noch nicht veröffentlicht und von den Autoren zurückgezogen wurden. Neuere Ergebnisse sind seither nicht zugänglich, so daß wir nur kurz die prinzipiellen Unterschiede angeben wollen. Eine detaillierte Diskussion ist auch deshalb nicht möglich, weil in dem Vordruck die technischen Details nur ungenügend beschrieben wurden.

Im Unterschied zu unseren Ergebnissen zeigen die Rechnungen von Fedder et al. praktisch keine Ablenkung des Plasmas hinter der Stoßfront; das Geschwindigkeitsfeld behält beim Durchgang durch die Front seine Richtung bei. Daraus resultieren Unterschiede in Teilchenzahldichte und Druck, ähnlich denen zu Schmidt und Wegmanns (1982) Modellen. Die Kompression des Magnetfeldes am Kometenkern ist mit 48 nT stärker als bei uns (40 nT) und Schmidt und Wegmann (43 nT), obwohl bei deren nächster Entfernung von 10^4 km vom Kern das Maximum noch nicht erreicht sein sollte. Ein Grund könnte sein, daß der Stagnationsdruck als freier Parameter vorgegeben wird.

Wesentliche Unterschiede stellen wir auch im Schweif fest. Zum einen liefert Fedders Rechnung auf der Schweifachse hinter dem Kern ein starkes Feld in Richtung des ursprünglichen Sonnenwindfeldes, das von der Größenordnung des maximalen Feldes im Stagnationsbereich ist. Für dieses Feld ist eine physikalische

Erklärung nicht zu finden. Die Schweifabplattung bei Fedder et al. ist wesentlich stärker ausgeprägt und weist in $2 \cdot 10^6 \text{ km}$ Entfernung vom Kern ein Verhältnis in der Schweifausdehnung von 1:10 auf, im Gegensatz von 2:3 in unserer Rechnung. Eine "Hantel" ist ebenso nicht zu erkennen. Neuere Rechnungen dieser Gruppe, die leider bis dato noch nicht publiziert sind, sollen unseren ähnlicher sein und auch die Hantelstruktur ergeben. Wir wollen daher von einem weitergehenden Vergleich mit den alten Ergebnissen Abstand nehmen.

5.2. KOMET HALLEY 1986

Wir wollen nun erstmals unsere Modelle mit Messungen kometarer Plasmen vergleichen. Zuvor sollen aber die Modellparameter und die zur Berechnung der detaillierten Quellterme aus Abschnitt 2.3 erforderlichen Funktionen diskutiert werden. Auch müssen wir uns für den Vergleich überlegen, wie die Trajektorie von Giotto in das Koordinatensystem unserer Simulation zu transformieren ist.

5.2.1. DAS MODELL FÜR DEN HALLEYSCHEN KOMETEN

Während der Begegnung von Giotto mit dem Kometen Halley am 13./14. März 1986 war die kometare Gasproduktionsrate $G \simeq 6.9 \cdot 10^{29} \text{ s}^{-1}$ (Krankowsky et al., 1986). Für Dichte, Geschwindigkeit und Ionentemperatur des solaren Windes können wir die Mittelwerte der von Giotto vor der Bugstoßwelle gemessenen Werte annehmen. Nach Johnstone et al. (1986) ist $\rho_{\odot} \simeq 7 m_p \text{ cm}^{-3}$, $v_{\odot} \simeq 380 \text{ km s}^{-1}$ und $T_{i\odot} \simeq 5 \cdot 10^4 \text{ K}$. Da wir zur Berechnung der Quellterme des Abschnitts 2.3 die Elektronen als thermisch separate Komponente behandeln, müssen wir auch die Elektronentemperatur des Sonnenwindes vorgeben. In den Rechnungen wurde $T_{e\odot} = 10^5 \text{ K}$ gesetzt, obwohl nach Rème et al. (1986) $T_{e\odot} = 2.5 \cdot 10^5 \text{ K}$ realistischer scheint. Der Sonnenwind sei vollionisiert ($\mu_{\odot} = 0.5$), das Magnetfeld ist $B_{\odot} \simeq 7 \text{ nT}$ (Neubauer et al., 1986). Entsprechend dem Winkel von ungefähr 34° zwischen dem Geschwindigkeitsvektor von Halley und dem durch den von der rotierenden Sonne abströmenden Sonnenwind spiralförmig verkrümmten IMF (sog. "Parkersche Spirale") ist die Magnetfeldkomponente $B_x \simeq 3.91 \text{ nT}$ in Richtung des Geschwindigkeitsvektors des Sonnenwindes und $B_y \simeq 5.8 \text{ nT}$ senkrecht dazu. Den Magnetfelddaten von Neubauer et al. (1986) können wir weiterhin entnehmen, daß der magnetische Feldvektor praktisch in der Ebene der Ekliptik liegt, die in unserem Modell daher durch die xy -Ebene aufgespannt wird. Die dazu senkrechte

Komponente ist $B_z = 0$.

Zur Berechnung der Wechselwirkung von Plasma und kometaem Neutralgas müssen wir die vom Abstand $r = |\vec{x}|$ abhängigen Funktionen des Abschnitts 2.3 spezifizieren. Wir übernehmen diese aus Schmidt et al.(1987). Sie werden durch Kombination von Huebners (1985) chemischem Neutralgasmodell und einem zweidimensionalen MHD-Modell mit chemischem Netzwerk ermittelt; es wird eine Vielzahl von molekularen Reaktionen berücksichtigt. Die numerischen Werte der Funktionen wurden von R.Wegmann zur Verfügung gestellt und sind im Anhang B tabelliert. Die Größen des MHD-Modells werden auf der Linie Sonne-Komet angenommen. In der Tabelle 1 finden wir die Neutralgasdichte $n_n(r)$, Molekülmasse $m_n(r)$, Geschwindigkeit $v_n(r)$ und Temperatur $T_n(r)$, sowie den Wirkungsquerschnitt für elastische Stöße $\sigma_{col}(r)$ und die Photoionisationsrate $\sigma_{ph}(r)$. Die kinetische Überschußenergie bei Photoionisation $\epsilon_{ph}(r)$ und das Ionisationspotential bei Stoßionisation $\epsilon_{ei}(r)$, sowie die Masse der photoionisierten Moleküle $m_{ph}(r)$ und der an Elektronenstößen beteiligten Moleküle $m_{ei}(r)$ sind in der Tabelle 2 angegeben. Dort findet man auch den Rekombinationskoeffizienten $a_{rec}(r)$ und die Masse der rekombinierenden Ionen $m_{rec}(r)$.

Eine graphische Darstellung der Parameter aus Schmidt et al.(1987) findet man in dem Bild 5.11. (a) zeigt die Verteilung der Moleküle mit verschiedenen Massen auf die Ionisationsprozesse, (b) die Ratenkoeffizienten.

Mit diesem chemischen Modell und den oben angegebenen Randbedingungen berechnen wir nun ein stationäres Modell für den Halleyschen Kometen. Da sich Giotto bis auf ungefähr 500 km dem Kern des Kometen näherte, sind wir an einer guten Auflösung des Stagnationsbereiches besonders interessiert. Wir verwenden daher ein nichtäquidistantes Gitter (Bild 3.2) mit 32^3 Stützstellen, die sich über eine Entfernung von $1.2 \cdot 10^6$ km in jeder Richtung vom Kometenkern erstrecken. Um auch die ferneren Gebiete in einer guten Auflösung mit der Beobachtung vergleichen zu können, wurde ein zweites Modell mit 50 äquidistanten Stützstellen in jeder Richtung erstellt.

Da wir im letzten Abschnitt die wesentlichen Eigenschaften eines Modellkometen diskutiert haben, wollen wir hier nur die Linien gleichen Magnetfeldbetrages (Bild 5.12), sowie Elektronen- und Ionentemperatur (Bild 5.13) in der Ekliptik

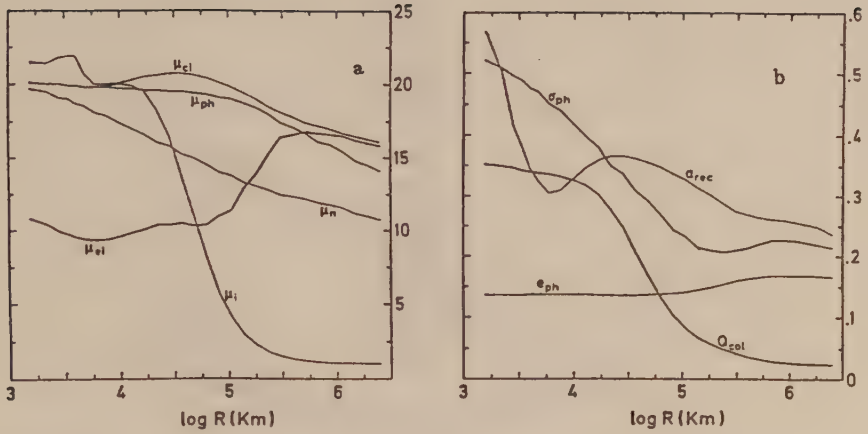


Abb. 5.11: (a) Mittleres Molekulargewicht $[m_p]$ der Neutralgasteilchen $\mu_n = m_n$ der photoionisierten Moleküle $\mu_{ph} = m_{ph}$, der durch Elektronenstoß ionisierten Moleküle $\mu_{ei} = m_{ei}$ und aller Ionen $\mu_i = m_i$. μ_{ci} ist das mittlere Molekulargewicht der Ionen kometaren Ursprungs. (b) Photoionisationsrate $\sigma_{ph}[10^{-6} \text{ s}^{-1}]$, kinetische Überschußenergie $e_{ph}[10^2 \text{ eV}]$ bei Photoprozessen, Rekombinationskoeffizient $a_{rec}[10^{-6} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}]$ und Wirkungsquerschnitt $Q_{col} = \sigma_{col}[10^{-14} \text{ cm}^2]$ für elastische Stöße zwischen Ionen und Neutralteilchen. Aus Schmidt et al. (1987).

zeigen. Das Bild 5.12 demonstriert das asymmetrische Umhüllen des Kerns durch das bezüglich der Richtung senkrecht zur Sonnenwindströmung geneigte IMF. Die Asymmetrien sind nur in dieser ekliptikalen Ebene, nicht aber in einem Schnitt senkrecht dazu zu erkennen, da das IMF vollständig in der Ekliptik liegt. Die Asymmetrien entstehen dadurch, daß an der Bugstoßwelle wegen $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ nur die zum Stoß tangentielle Komponente des IMF komprimiert wird. Diese ist rechts der Komet-Sonne-Linie ($y > 0$) größer als links ($y < 0$), was wir in dem Bild 5.12 erkennen. Nähern wir uns dem Kern des Kometen, so nimmt der Grad der Asymmetrie des Feldes ab. Bei Feldstärken $B \gtrsim 30 \text{ nT}$ ist das Feld praktisch symmetrisch. Wie bei der Diskussion des stationären Modells im letzten Abschnitt, liegt auch in dem nichtäquidistanten Gitter die gezeigte Ebene 2500 km von der Ekliptik entfernt, wodurch das Magnetfeld im Schweif nicht völlig verschwindet.

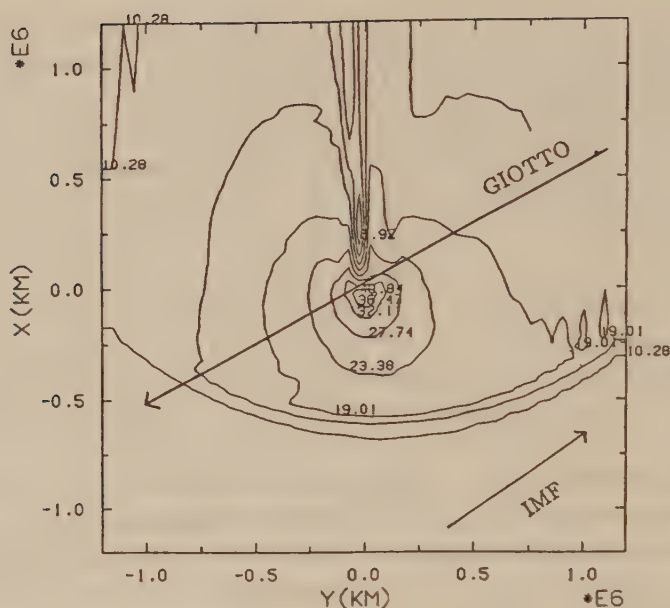


Abb. 5.12: Konturen des Magnetfeldbetrages [nT] in der ekliptikalen Ebene für die Simulation des Halleyschen Kometen. Eingezeichnet sind die Richtung des IMF und die Trajektorie von Giotto.

An der Ausrichtung des Schweifes erkennen wir, daß die unterschiedliche Feldkompression zu einer Aberration von ungefähr 5° von der Komet-Sonne-Linie führt: Das stärkere Feld oberhalb dieser Linie "drückt" den Schweif aus der Richtung der Sonnenwindströmung heraus; nur so läßt sich das Druckgleichgewicht erreichen.

Abgesehen von der Aberration des Schweifes ist die Asymmetrie des Magnetfeldes bei den übrigen hydrodynamischen Variablen nicht so ausgeprägt. Als Beispiel sind im Bild 5.13 die Ionen- und Elektronentemperatur dargestellt. Die Iontemperatur ist dem des im vorigen Abschnitt diskutierten idealen Modells sehr ähnlich und bedarf keiner weiteren Erläuterung. Die Temperatur der Elektronen wird in dem Stoß nur um einen Faktor 1.3 erhöht, da die kinetische Energie der Elektronen zur Gesamtbilanz nichts beiträgt und daher praktisch nur die Ionen ge-

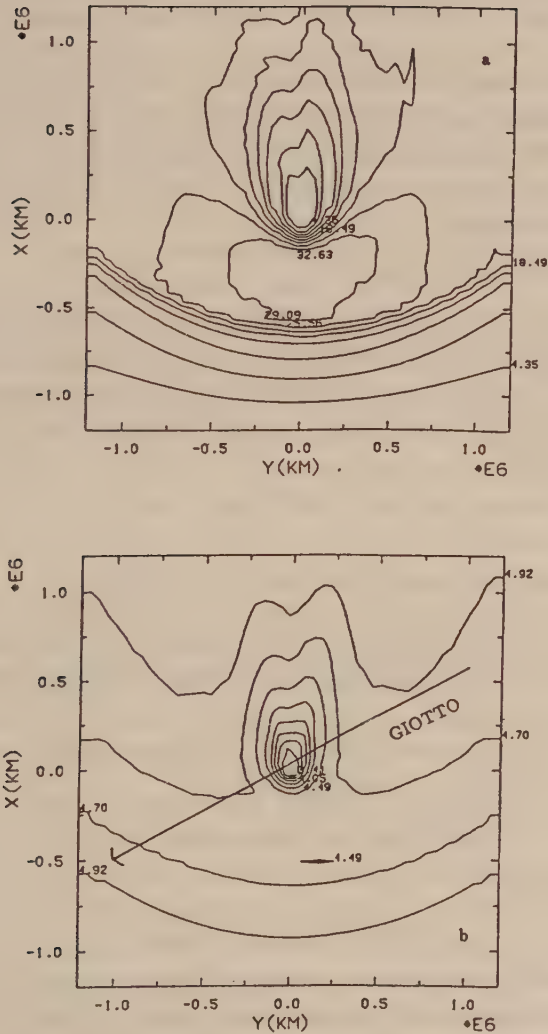


Abb. 5.13: Konturen von Ionen- (a) und Elektronentemperatur (b) in der Ekliptik für die Simulation des Halleyschen Kometen. Eingezeichnet ist die Trajektorie von Giotto. Ionentemperatur in 10^5 K, Elektronentemperatur logarithmisch in K.

heizt werden. Zum Kern hin nimmt die Elektronentemperatur dann immer weiter ab, da die Dichte der Neutralteilchen hier stark anwächst und dadurch die Kühlung des Elektronengases durch Stoßionisation immer effektiver wird. Im Gegensatz zu den "kalten" Ionen ist nicht die Addition von Elektronen kometaren Ursprungs der Grund für die Kühlung des Elektronengases. Diese haben durch den Ionisationsprozess eine kinetische Energie von ungefähr 15 eV (siehe auch Bild 5.11), was einer Temperatur von etwa $1.8 \cdot 10^5 \text{ K}$ entspricht und damit den ungestörten Temperaturen des Sonnenwinds sehr nahe kommt. Die Elektronen kometaren Ursprungs sind also nicht "kalt". Hinter dem Kern im Schweif werden die Elektronen wieder dünner und heißer.

5.2.2. DIE GIOTTO-TRAJEKTORIE

Der Sonnenwind ströme entlang der x -Richtung unseres Modellkoordinatensystems; die Komponente des IMF senkrecht dazu deute in die y -Richtung. Kennen wir die Winkel ϑ und φ zwischen der Trajektorie und x - bzw. y -Achse kennen, so können wir die Position $\vec{x}$ von Giotto in unserem Koordinatensystem zur Zeit t durch die Gleichung

$$\vec{x} = \vec{x}_o + v_{rel} \vec{c}(\vartheta, \varphi) t, \quad (5.5)$$

mit

$$\vec{c}(\vartheta, \varphi) = \cos \vartheta \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_z, \quad (5.6)$$

beschreiben. Den Zeitnullpunkt legen wir so fest, daß $t = 0$ die nächste Annäherung an den Kern und folglich $\vec{x}_o$ die Ortskoordinate dieses Ereignisses darstellt.

Für Giotto ist nach Reinhard (1986) $\vartheta = 102.2^\circ$, $\varphi = 170.86^\circ$ und $v_{rel} = 68.373 \text{ km s}^{-1}$. Die nächste Annäherung ist

$$\vec{x}_o [\text{km}] = 101 \vec{e}_x + 9 \vec{e}_y - 479 \vec{e}_z. \quad (5.7)$$

Mit ϑ und φ folgt $\vec{c}$ zu

$$\vec{c} = -0.965 \vec{e}_x + 0.154 \vec{e}_y - 0.211 \vec{e}_z. \quad (5.8)$$

Der Winkel ϑ wurde dabei auf die Schweifaberration durch die Bahnbewegung des Kometen korrigiert und ist daher von dem in obiger Referenz angegebenen Wert ($\vartheta = 107.05^\circ$) etwas verschieden.

5.2.3. VERGLEICH MIT DEN MESSDATEN

Bevor wir unser Modell mit den von Giotto übermittelten Daten vergleichen, wollen wir die physikalischen Größen des Modells entlang der Giotto-Trajektorie diskutieren.

In dem Bild 5.14 sind die Variablen der Simulation dargestellt, durchgezogene Linien vor, gestrichelte nach der nächsten Annäherung an den Kern um $0.03 h$ am 14. März 1986. Da die im Bild 5.12 eingezeichnete Trajektorie um etwa 10° gegen die y -Achse geneigt ist, befindet sich Giotto vor der nächsten Annäherung hinter ($x > 0$), danach vor dem Kometenkern ($x < 0$). Die Variablen sind, neben der Neigung des IMF gegen die Normale der Sonnenwindgeschwindigkeit, auch deshalb asymmetrisch bezüglich Ein- und Ausflug.

Elektronen- und Ionentemperaturen sind vor der nächsten Annäherung kleiner als danach, innerhalb der innersten $3 \cdot 10^4 km$ ist die Ionentemperatur symmetrisch. Dieser Trend ist unmittelbar verständlich, da hinter dem Kometen die Ionentemperaturen generell kleiner sind als in der "Stauzone" des Plasmas zwischen Bugstoßwelle und Kern, wenn man von den kühlen, kernnahen Gebieten einmal absieht; hier können wir auch in guter Näherung Symmetrie feststellen. Die Elektronendichten hingegen sind entlang der Einflugtrajektorie höher als danach, weil durch das Umströmen des Kerns der Dichtegradient hinter dem Kern nicht so steil ist wie im Stagnationsbereich. Nur ganz nahe am Kern ist die Dichte beim Ausflug höher. Die Geschwindigkeiten sind im wesentlichen symmetrisch bezüglich der nächsten Annäherung, das mittlere Molekulargewicht ist beim Ausflug für $r \gtrsim 5 \cdot 10^4 km$ kleiner als entlang der Einflugtrajektorie, da hinter dem Kern die kometaren Ionen dominieren.

Das magnetische Feld ist generell beim Einflug etwas geringer, da wir beim Ausflug durch den "Stau" des Feldes vor dem Kern fliegen. Ein wichtiges Ergebnis der Rechnung ist, daß das Feld etwa $3200 km$ vor dem Kern beim Einflug auf ungefähr $5 nT$ stark abfällt. In einem Abstand von $3800 km$ steigt es dann beim Ausflug ebenso stark wieder an. Der drastische Abfall des Feldes zeigt, daß in diesen Entfernungen die Kontaktfläche liegt, die Magnetosphäre von Magnetopause und kometare Ionen von dem Gemisch aus Ionen und solaren Protonen trennt. Rechnen wir die Entfernungen in Flugzeiten um, so entspricht das einem

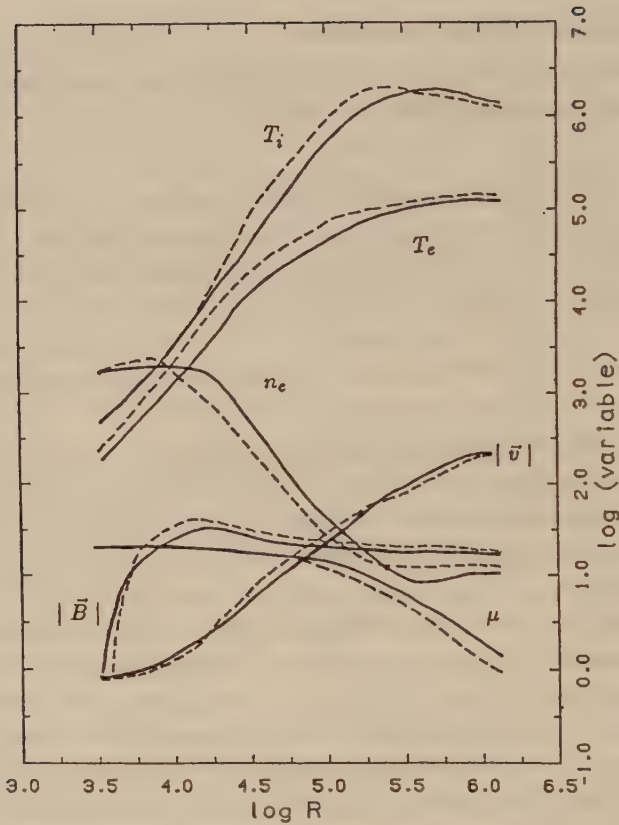


Abb. 5.14: Variablen des MHD Modells für den Kometen Halley entlang der Trajektorie von Giotto. T_i , T_e : Ionen- und Elektronentemperatur in K, n_e : Elektronendichte in cm^{-3} , $|\vec{v}|$: Geschwindigkeit in km s^{-1} , $|\vec{B}|$: Magnetfeldbetrag in nT, μ : Mittleres Molekulargewicht. Durchgezogene Linien stellen die Variablen entlang der Einflug-, gestrichelte entlang der Ausflugtrajektorie dar.

Einflug von Giotto 46 s vor und einem Ausflug 55 s nach der nächsten Annäherung an den Kern. Der Wert entlang der Einflugtrajektorie ist etwas geringer als die gemessenen 69 s, entlang der Ausflugtrajektorie stimmt unser theoretischer Wert

mit den beobachteten 56 s sehr gut überein. Die Differenzen entsprechen aber nur einer Flugstrecke von 1500 km und sind daher unterhalb der Auflösung unserer Rechnung.

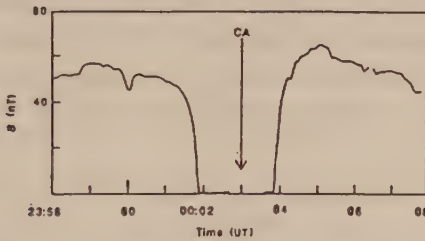


Abb. 5.15: Messungen des Magnetfeldes kurz vor und nach der nächsten Annäherung von Giotto an den Kern um 0.03 h, aus Neubauer et al.(1986). "CA" markiert die feldfreie Zone zwischen Kontaktfläche und Kometenkern.

Die Magnetfeldmessungen während der letzten Minuten vor der nächsten Begegnung und der ersten danach sind in dem Bild 5.15 gezeigt. Das Feld nach Durchquerung der Magnetopause ist größer als das vor dem Eindringen, was in guter Übereinstimmung mit unserer Rechnung ist. Die gemessenen Maximalfeldstärken werden 4 min vor und 2 min nach der nächsten Annäherung gemessen, was etwa 16400 km und 8200 km entlang der Trajektorie entspricht. Unsere Rechnung ergibt ungefähr 20000 km davor und 15000 km danach, was etwas größer ist, aber generell die richtige Tendenz zeigt.

Für einen direkten Vergleich der Meßdaten mit der MHD Simulation eignet sich das Magnetfeld am besten, da für die anderen Plasmagrößen - im Gegensatz zu der Begegnung mit Giacobini-Zinner - bisher nur wenig oder zum Vergleich ungeeignetes Datenmaterial vorliegt.

Im Bild 5.16 sind die Magnetfeldmessungen von Neubauer et al.(1986) für einen längeren Zeitraum als im Bild 5.15 dargestellt. Schmidt et al. (1986) konnten zeigen, daß die raschen Variationen der y- und z-Komponenten des Feldes mehr oder weniger durch Änderungen der Richtungen, nicht aber der Beträge dieser Komponenten im IMF verursacht werden (Bild 5.17). Wir vergleichen aus diesem Grunde

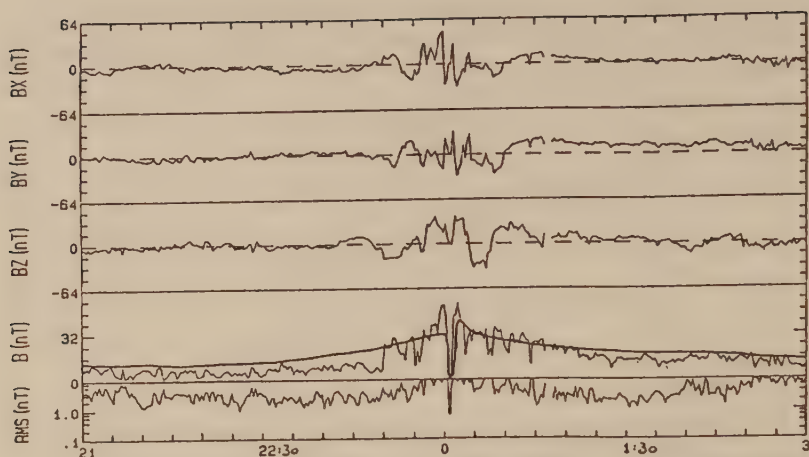


Abb. 5.16: Messungen der Magnetfeldkomponenten nach Neubauer et al. (1986) in komet-solar-ekliptischen Koordinaten. B (nT) zeigt den Betrag des Feldes; dort ist auch das Ergebnis der Halley-Simulation eingezeichnet.

nur den Betrag des Feldes mit unserer Simulation, da dann die so verursachten Schwankungen aus den Daten herausfallen.

Um 23.30 h durchfliegt Giotto offensichtlich eine Diskontinuität, in der das Magnetfeld komprimiert wird. Diese Diskontinuität ist verbunden mit einer plötzlichen Abnahme der Geschwindigkeit und einer Zunahme der Dichte der Elektronen mit Energien oberhalb 10 eV. Die Verteilungsfunktion der Elektronen geht von Isotropie zu einer den Feldlinien folgenden Verteilung über (d'Uston et al., 1987). Diese Diskontinuität wird in der Literatur auch als Kometapause bezeichnet (Gringauz et al., 1986). Deren Abstand vom Kern fällt mit dem Bereich zusammen, in dem der Einfluß der kometaren Ionen auf die Strömung wichtig wird (Galeev, 1987). Beim Vergleich unserer Simulation mit den Beobachtungsdaten bemerken wir, daß vor dem Durchflug der Kometapause das theoretische Feld zu groß ist, während es danach und entlang der Ausflugtrajektorie in guter Übereinstimmung mit den Magnetfelddaten ist, was auch bei Schmidt et al. (1986) der Fall ist. Offensichtlich fliegt Giotto gegen 23.30 h in einen Bereich der Magne-

tosphäre ein, in dem die Verteilung des totalen IMF auf Normal- und Tangentialkomponente in unserer Rechnung den tatsächlichen Bedingungen näherkommt. Vom Standpunkt der MHD Simulation können wir daher die Kometopause als magnetische Diskontinuität im solaren Wind interpretieren, durch die der Winkel zwischen der Sonnenwindströmung und dem IMF vergrößert wird. Das Feld wird dann stärker komprimiert. Für den größten Teil der Einflugtrajektorie scheint ein kleinerer Winkel zwischen Sonnenwindströmung und IMF der Wirklichkeit näherzukommen.

In der Umgebung der nächsten Annäherung, d.h. in den letzten Minuten davor und danach, ist die Feldkompression der Simulation geringer als bei Halley gemessen; das gilt auch für die Simulation von Schmidt et al. (1986). Der Abfall und Wiederanstieg des Feldes werden sehr gut wiedergegeben, der oben diskutierte geringfügig längere Flug durch die Magnetopause fällt in dieser Zeitskala nicht ins Gewicht.

Was könnte der Grund für die geringe Feldkompression sein? Wie die Arbeit von Schmidt et al. (1986) zeigen konnte, sind die Feldschwankungen der y- und z-Komponenten weniger turbulenter Natur als eine Folge von tangentialen Diskontinuitäten im IMF. Aus dem Verhältnis der gemessenen Komponente konnten sie den Azimut φ des Feldes bestimmen, was in dem Bild 5.17 aus deren Arbeit dargestellt ist. Wenn wir 180°-Drehungen des Feldes vernachlässigen, so kehrt das Feld nach ungefähr zwei Stunden wieder zu seinem Ausgangsazimut zurück. In einer groben Näherung könnte man es also als eine Drehung des Feldes mit einer Periode von zwei Stunden betrachten.

Von Wegmann (1987, private Mitteilung) stammt nun der Vorschlag, daß durch diese Felddrehung der magnetische Fluß um den Kern des Kometen herum behindert, und dadurch das Feld vor dem Kern stärker komprimiert werden kann. Wir werden das mit zeitabhängigen Modellen im Abschnitt 6.3 prüfen.

Abschließend wollen wir unser Modell noch mit den von Rème et al. (1986) veröffentlichten Elektronengeschwindigkeiten vergleichen. Dadurch können wir auch ansatzweise prüfen, wie realistisch unsere Annahme einer gemeinsamen Geschwindigkeit aller Plasmateilchen ist.

Das Bild 5.18 zeigt, daß Messung und Simulation gut übereinstimmen; die

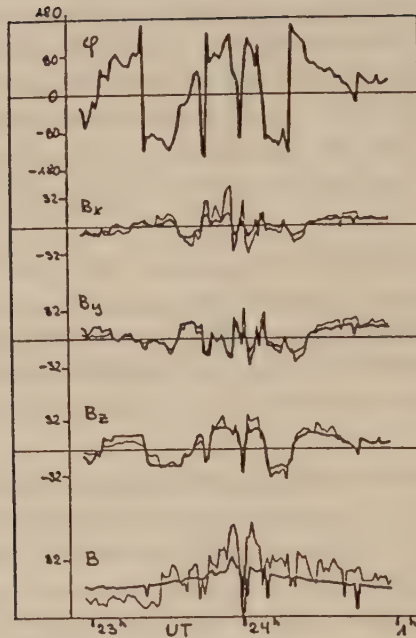


Abb. 5.17: Azimut φ des IMF in der yz -Ebene nach Schmidt et al. (1986). Das MHD-Modell, das die Autoren mit den Messungen vergleichen, wurde jeweils um diesen Winkel gedreht. Aus dem Vergleich mit der MHD Simulation sieht man, daß die Feldschwankungen vorwiegend auf tangentielle magnetische Diskontinuitäten zurückzuführen sind.

Turbulenzen direkt hinter der Bugstoßwelle kann unser Modell nicht reproduzieren. Der Abstand der Bugstoßwelle entlang der Trajektorie von $1...1.3 \cdot 10^6 \text{ km}$ paßt sehr gut zu dem gemessenen Wert von $1.15 \cdot 10^6 \text{ km}$.

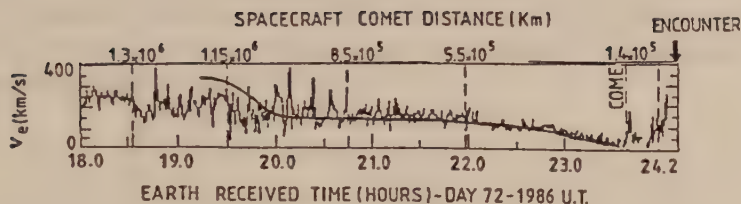


Abb. 5.18: Vergleich der Elektronengeschwindigkeit nach Rème et al.(1986) mit der Halley-Simulation.

5.2.4. VERGLEICH MIT DEN ERGEBNISSEN VON SCHMIDT UND WEGMANN

Wir werden zum Vergleich der Simulationen das dem Bild 5.14 entsprechende Bild aus Wegmann et al.(1987) entnehmen.

Die stärkste Differenz besteht zwischen den Elektronendichten und temperaturen. In unserem Modell ist die Dichte beim Ausflug geringer als beim Einflug, bei Schmidt und Wegmann ist es gerade umgekehrt. Die Dichten sind in unserem Modell generell größer, abgesehen von dem Bereich weit weg vom Kern ($r \gtrsim 3 \cdot 10^5 \text{ km}$) und ganz nahe daran. Entsprechend sind unsere Geschwindigkeiten etwas geringer.

Ein Grund für die Unterschiede in den Elektronentemperaturen, zumindest in den kernferneren Bereichen, könnte die Verwendung verschiedener Gleichungen für die Energiebilanz der Elektronen in beiden Simulationen sein. Im Gegensatz zu unserer Gl.(2.17) verwenden Wegmann et al. (1987) fälschlicherweise die Gleichung

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} + \gamma (\vec{\nabla} \cdot p_e \vec{v}) = \dot{\epsilon}_e ,$$

die sich von Gl.(2.17) um den Transportterm $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) p_e$ unterscheidet. In der Nähe der Kontaktfläche, wo die Geschwindigkeiten klein sind, sind die Differenzen, die durch den zusätzlichen Term verursacht werden, zu vernachlässigen. Gerade dort aber sind die Ergebnisse sehr verschieden. Bei uns fällt die Temperatur durch Stoßionisation auf bis zu 10^3 K ab, bei Schmidt et al. nur auf 10^4 K und bleibt dann für $r \lesssim 10^4 \text{ km}$ konstant. Der Grund für den Unterschied ist die geringere Geschwindigkeit in unserer Simulation. Durch sie können die Elektronen länger in

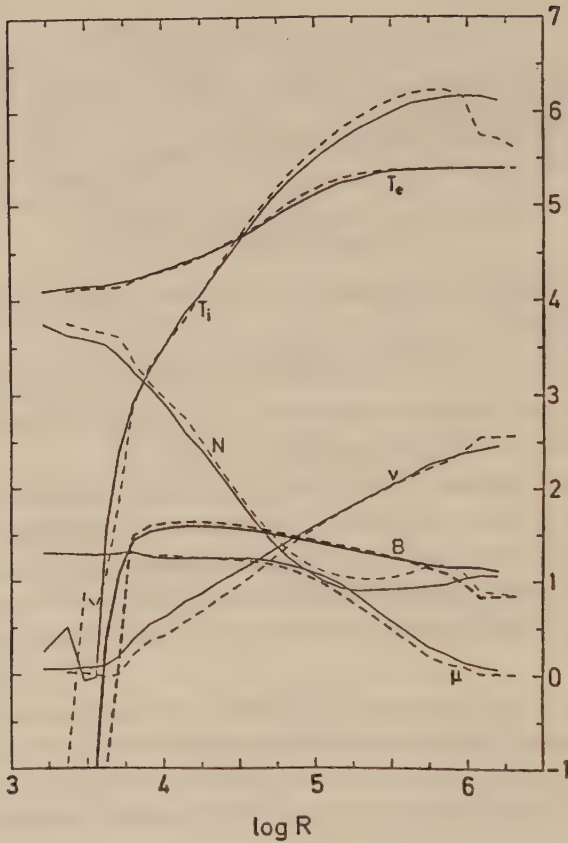


Abb. 5.19: Wie Bild 5.14, nur mit der Simulation von Wegmann et al. (1987).

dem kernnahen Gebiet verweilen und auch länger an den Stoßprozessen teilnehmen und gekühlt werden.

Das Magnetfeld beider Simulationen stimmt recht gut überein, das Maximum vor dem Abfall an der Kontaktfläche wird in unserer Simulation in etwas größerem Abstand vom Kern erreicht. Der Abstand der Kontaktfläche ist in beiden Rechnungen ungefähr gleich.

5.2.5. VERGLEICH MIT DEM IDEALISIERTEN MODELL

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie wichtig die Berücksichtigung der detaillierten Quellen für Masse, Impuls und Energie für die Simulation des Halleyschen Kometen ist.

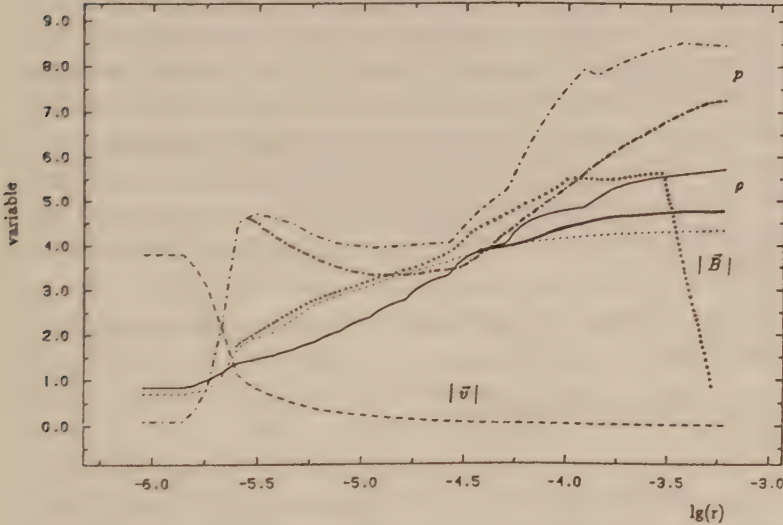


Abb. 5.20: Dichte logarithmisch in $m_p \text{ cm}^{-3}$, Geschwindigkeit in 100 km s^{-1} , thermischer Druck in $2 \cdot 10^{-8} \text{ dyn cm}^{-2}$ und Magnetfeldbetrag in 10 nT auf der Linie Sonne-Komet vor dem Kern des Kometen. In dem Modell mit stärkerer Strichdicke wurden die Quellterme aus dem Abschnitt 2.3 berücksichtigt, das andere Modell ist ein idealisiertes Modell, wie es im Abschnitt 5.1 gezeigt wurde. Modellparameter für die Begegnung von Giotto mit Halley.

In dem Bild 5.20 zeigen wir zwei Modelle für den Halleyschen Kometen, eines mit den detaillierten Quellen des Abschnittes 2.3 (stärkere Striche), und ein idealisiertes Modell. In der Abbildung finden wir Dichte, Geschwindigkeit, thermischen Druck und Magnetfeldstärke auf der Linie Sonne-Komet.

Die Bugstoßwelle liegt bei beiden Modellen ungefähr $5.3 \cdot 10^5 \text{ km}$ vor dem Kometenkern auf der Linie Sonne-Komet. Die Dichten unterscheiden sich bis etwa 16000 km vor dem Kern nicht. Danach ist die Dichte des detaillierten Modelles kleiner als die des idealisierten, da Ionen durch Rekombinationsprozesse verschwinden. Generell sind die Unterschiede der beiden Modelle in den innersten 30000 km am stärksten ausgeprägt. Thermischer Druck und Magnetfeld zeigen hier ein gegenläufiges Verhalten. Während im idealisierten Modell der thermische Druck größer ist als in der detaillierten Simulation, ist es beim Magnetfeld gerade umgekehrt. Der totale Druck ist in beiden Modellen mit $2.7 \cdot 10^{-8} \text{ dyn cm}^{-2}$ ungefähr gleich. Durch die geringere Dichte im Bereich des Kometenkerns beim detaillierten Modell wird der thermische Druck verringert. Der Stagnationsdruck, der vom Sonnenwind bestimmt wird, muß aber in beiden Modellen ungefähr gleich sein und vom gesamten Plasmadruck aufgebracht werden. Daher wird aufgrund der Rekombinationsprozesse die Kompression des magnetischen Feldes im detaillierten Modell begünstigt.

Die Geschwindigkeiten von idealem und detailliertem Modell unterscheiden sich praktisch nicht.

5.3. KOMET GIACOBINI-ZINNER 1985

Bei der Simulation der Begegnung der Sonde ICE mit dem Kometen Giacobini-Zinner am 11. September 1985 werden wir ähnlich vorgehen wie bei Halley im letzten Abschnitt. Nach einer Diskussion der Modellparameter werden wir die Transformation unseres Modellkoordinatensystems in Komet-solar-ekliptische Koordinaten und die Trajektorie von ICE angeben. Anschließend werden wir das Modell mit den Beobachtungen vergleichen.

5.3.1. DAS MODELL FÜR DEN KOMETEN GIACOBINI-ZINNER

Für die Begegnung von ICE mit dem Kometen Giacobini-Zinner entnehmen wir die Plasmaparameter des solaren Windes der Arbeit von Bame et al. (1986). Wir wählen - wie Wegmann (1987) - $\rho_{\odot} = 5 m_p \text{ cm}^{-3}$, $\mu_{\odot} = 0.5$, $v_{\odot} = 500 \text{ km s}^{-1}$, $T_{e\odot} = 2.3 \cdot 10^5 \text{ K}$ und $T_{i\odot} = 5 \cdot 10^4 \text{ K}$; das Magnetfeld setzen wir nach Smith et al. (1986) $B_{\odot} = 8 \text{ nT}$. Auf der Bahn von ICE ist es um ungefähr 45° gegen das solare Geschwindigkeitsfeld geneigt, welches wieder in die x-Richtung

unseres kartesischen Koordinatensystems deutet; die Magnetfeldkomponente senkrecht dazu stehe in y -Richtung. Wir rechnen in dem - schon bei Halley bewährten - nichtäquidistanten Gitter mit 32^3 Stützstellen. Wir berücksichtigen einen Abstand von 10^5 km in jeder Richtung vom Kometen und nähern uns dem Kometenkern dadurch bis auf 330 km .

Die Funktionen zur Bestimmung der Quellterme für Impuls und Energie werden wie beim Kometen Halley gewählt (siehe Anhang B); für die Massenquelle benutzen wir die idealisierte Quelle Gl.(2.3) mit $G = 4.5 \cdot 10^{28} \text{ s}^{-1}$ (Mendis et al., 1986), $\sigma = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ und $v_c = 1 \text{ km s}^{-1}$. Für σ und v_c wird auch in den übrigen Quelltermen dieser feste Wert angenommen.

Aus dem unter diesen Voraussetzungen berechneten Modell zeigen wir Dichte und Magnetfeldbetrag in einer Querschnittsebene 8000 km hinter dem Kern in dem Bild 5.21 und dem Bild 5.22. Diese Ebene entspricht ungefähr der Durchflugebene von ICE; die Sonde durchflog den Schweif in einer Entfernung von etwa 7800 km vom Kern auf der eingezeichneten Trajektorie. Punkte trennen jeweils Flugzeiten von einer viertel Stunde; ebenso sind einige Zeiten in Weltzeit ("universal time") angegeben. Der zentrale Schweif wurde um 11.02 h durchquert. In dem Bild 5.21 mit dem Magnetfeld ist gestrichelt das Gebiet eingezeichnet, in dem das Magnetfeld die Polarität wechselt. Außerhalb dieses Gebietes deutet die x -Komponente des Feldes in Richtung des ungestörten Sonnenwindes, innerhalb in die Gegenrichtung. Die Äquatorebene trennt nur im inneren Bereich des Schweifes zwei Bereiche entgegengesetzter Polarität, da das IMF um weniger als 90° gegen die Richtung der Sonnenwindgeschwindigkeit geneigt ist. In den äußeren Bereichen des Schweifes überwiegt dann die zur Sonnenwindströmung parallele Komponente des IMF. Aus diesem Grunde sind auch die Feldstärken auf beiden Seiten der Äquatorebene etwas verschieden. Die Verteilung der Dichte in Bild 5.22 ist ziemlich symmetrisch in der dargestellten Querschnittsebene, da wir noch nahe am Kern sind und daher die durch das Magnetfeld hervorgerufene Abplattung des Schweifes senkrecht zum IMF noch nicht sehr stark ist. Sie ist in dem Diagramm nur schwach zu erkennen - am besten an den innersten Konturen.

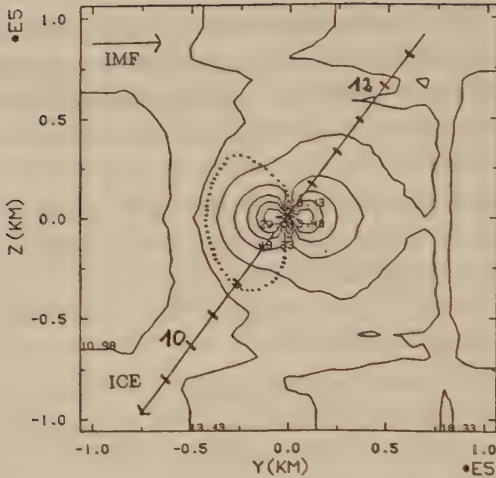


Abb. 5.21: Konturen der Magnetfeldstärke (nT) in einer Querschnittsebene 8000 km hinter dem Kern für die Giacobini-Zinner-Simulation. Eingezeichnet sind die ICE-Trajektorie und die Richtung des IMF; Striche trennen je 15 Minuten Flugzeit, der zentrale Schweif wurde um 11.02 h durchquert. Der gestrichelte Bereich trennt die Gebiete unterschiedlicher magnetischer Polarität. Außerhalb deutet die x -Komponente des Feldes in Richtung der ungestörten Sonnenwindgeschwindigkeit, innerhalb in die Gegenrichtung.

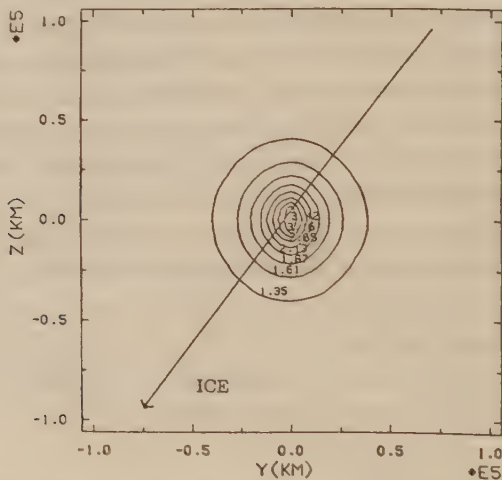


Abb. 5.22: Konturen der Dichte logarithmisch in $m_p \text{ cm}^{-3}$ in einer Querschnittsebene 8000 km hinter dem Kern für die Giacobini-Zinner-Simulation. Eingezeichnet ist die ICE-Trajektorie

5.3.2. DIE TRAJEKTORIE

Die ICE-Trajektorie können wir aus Rosenvinge et al.(1986) und McComas et al.(1987) konstruieren. Mit der in Gl. (5.5) eingeführten Beschreibung der Trajektorie gilt für die Begegnung von ICE und Giacobini-Zinner:

$$\vartheta = 102.2^\circ ,$$

$$\varphi = 170.86^\circ ,$$

$$v_{rel} = 23 \text{ km s}^{-1} ,$$

$$\vec{x}_0[km] = 7542.4 \vec{e}_x + 1988 \vec{e}_s ,$$

$$\vec{e} = -0.0558 \vec{e}_x - 0.586 \vec{e}_y + 0.804 \vec{e}_s . \quad (5.9)$$

Die Trajektorie ist in Bild 5.21 und Bild 5.22 eingezeichnet. Im Gegensatz zu Giotto fliegt ICE hinter dem Kometenkern durch den Schweif. Leider liegt das Magnetfeld aber nicht wie bei Halley in der Ekliptik. Zum Vergleich mit den Beobachtungen müssen wir daher unser Koordinatensystem noch um den Winkel θ zwischen beobachteten ekliptikalen und Modellkoordinaten drehen: Ist das Feld $\vec{B}$ Ergebnis unserer Simulation, so müssen wir es zum Vergleich mit den Beobachtungen nach

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \vec{B} \quad (5.10)$$

transformieren. $\vec{B}'$ ist dann in Komet-solar-ekliptischen Koordinaten, die auch für die Beobachtungen verwendet werden. Für die ICE-Begegnung mit Giacobini-Zinner ist $\theta = 47^\circ$, für Giotto ist $\theta = 0^\circ$.

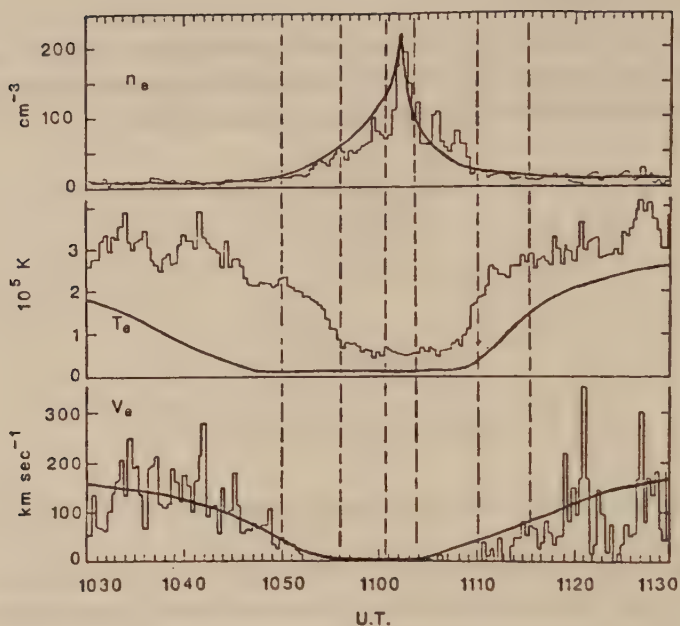


Abb. 5.29: Elektronendichte n_e , -temperatur T_e und -geschwindigkeit v_e aus Bame et al. (1986) im Vergleich zu unserer MHD-Simulation.

5.3.3. VERGLEICH MIT DER BEOBACHTUNG

Zum Vergleich von Beobachtung und MHD-Simulation verwenden wir die Elektronendichte, Elektronentemperatur und die Geschwindigkeit (Bame et al., 1986), sowie die drei Magnetfeldkomponenten (Smith et al., 1986).

Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur sind in dem Bild 5.23 für den Zeitraum einer Stunde dargestellt. Das Schweifzentrum wurde um 11.02 h durchquert. Die Dichte steigt im Vergleich zu den Meßdaten etwas zu stark an, beim Ausflug sind beide in guter Übereinstimmung. Lokale Störungen durch Turbulenzen kann unser Modell nicht reproduzieren. Diese sind im Geschwindigkeitsfeld besonders groß. Im Mittel passen Theorie und Messung der Elektronengeschwindigkeiten aber gut zueinander, was wiederum ein Hinweis darauf ist, daß unsere Annahme

einer gemeinsamen Geschwindigkeit der Plasmakomponenten nicht gar zu falsch sein kann.

Diskrepanz sind zweifellos die Elektronentemperaturen. Hier liegen die Messungen um $1...2 \cdot 10^5 \text{ K}$ über den theoretisch ermittelten Werten, der Verlauf wird aber qualitativ richtig wiedergegeben. Wir werden den Unterschied später noch zu erklären versuchen.

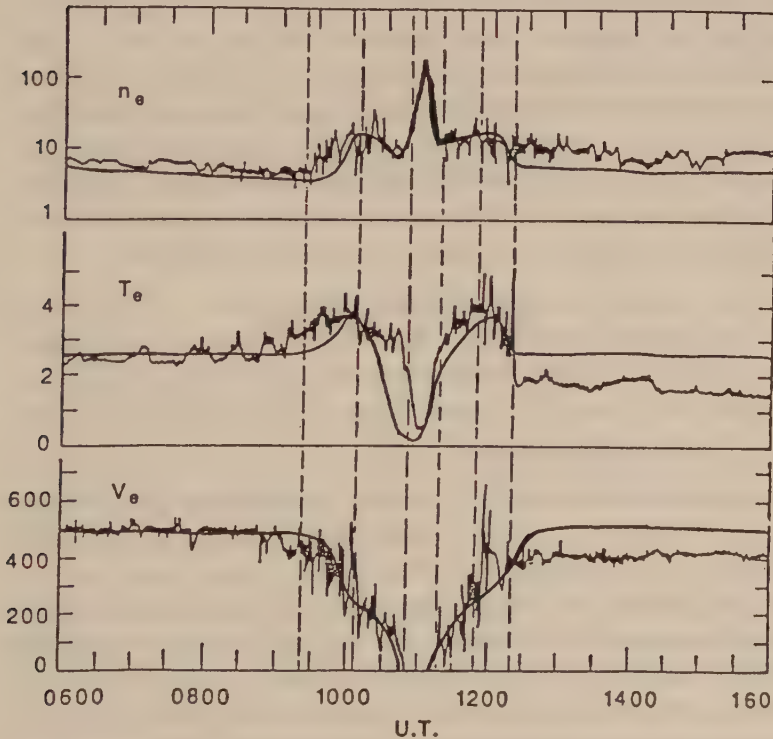


Abb. 5.24: Wie Bild(5.23). Gezeigt ist hier ein größerer Ausschnitt der gemessenen Daten. Aus Bame et al.(1986).

Betrachten wir eine längere Sequenz der Meßdaten im Bild 5.24 aus Bame

et al.(1986), so sehen wir, daß im Bereich der Bugstoßwelle zwischen 9.30 h und 10.00 h die Elektronen bis auf $4 \cdot 10^5 \text{ K}$ geheizt werden, was von dem Modell nicht erreicht wird. Diese hohen Werte erhalten wir nur auf der Verbindungslinie Sonne-Komet, nicht aber auf der dazu vertikalen ICE-Trajektorie. Dort bleibt die Temperatur der Elektronen immer unterhalb der $2.3 \cdot 10^5 \text{ K}$, die für den ungestörten Sonnenwind angenommen wurden.

Bei Boice et al.(1986) werden die hohen Temperaturen an der Bugstoßwelle zwar auch nicht erreicht, der Temperaturverlauf in der Nähe der Schweifdurchquerung wird aber wesentlich besser wiedergegeben. Hier spielt mit Sicherheit das Modell für das Neutralgas eine Rolle, da die genannten Autoren ihren Rechnungen ein realistischeres Modell für die Wechselwirkung von Plasma und Neutralgas, das die speziellen Eigenschaften des Kometen Giacobini-Zinner berücksichtigt, zugrunde legen. Wir hatten dasselbe Modell wie beim Kometen Halley verwendet. Aus der Diskrepanz der beiden Rechnungen können wir lernen, wie wichtig eine möglichst genaue Beschreibung der Quellen von Impuls und Energie ist.

Im Bild 5.25 sind die Magnetfeldmessungen abgebildet. Um die Daten 3 h vor und nach der Durchquerung des zentralen Schweifes zu vergleichen, wurde zusätzlich zu dem nichtäquidistanten Modell eine Simulation in einem äquidistanten Gitter mit 30^3 Stützstellen durchgeführt, wobei $3 \cdot 10^5 \text{ km}$ in jede Richtung vom Kometenkern gerechnet wurden.

Die Komponente B_x ist das Feld entlang der Verbindungslinie Komet-Sonne, d.h. gegen die Richtung der Sonnenwindströmung. Bei einer Trajektorie parallel zum IMF und ohne Feldkomponente in Richtung der x -Achse würden wir eine symmetrische Verteilung von B_x mit entgegengesetzter Polarität bezüglich Ein- und Ausflug erwarten. Beide Bedingungen werden aber nicht erfüllt. Zum einen ist die ICE-Trajektorie um 140° gegen die IMF-Richtung geneigt, zum anderen hat das IMF eine Komponente in x -Richtung, die - wie schon bei Halley - ein symmetrisches Umhüllen des Kerns durch das Feld verhindert. Bild 5.21 und Bild 5.25 zeigen diesen Effekt für Giacobini-Zinner. Das gegen die Sonnenwindströmung geneigte Feld bewirkt, daß das Feld beim Ausflug zwar die Polarität wechselt, nach ungefähr einer halben Stunde (11.30 h) überwiegt aber wieder der Anteil des ungestörten Sonnenwindfeldes parallel zur x -Achse und das Feld hat wieder die-

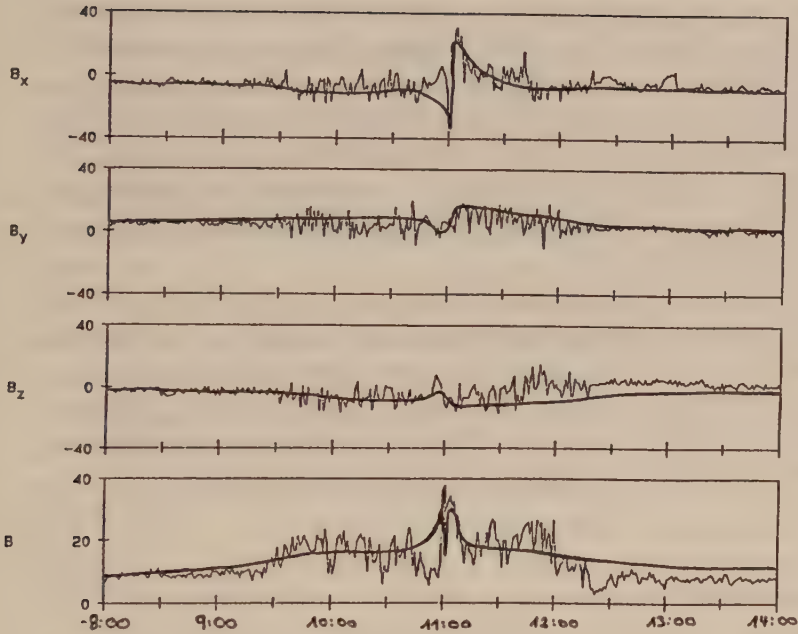


Abb. 5.25: ICE Magnetometer-Messungen der drei Magnetfeldkomponenten in [nT] im Vergleich zu unserer Simulation. B ist der Betrag des Magnetfeldes. Die Daten stammen aus Smith et al.(1986).

selbe Polarität wie beim Einflug. Die y - und z -Komponente zusammen ergeben die Feldkomponente in Richtung des IMF. Der Verlauf der Komponenten ist daher sehr ähnlich, wegen der speziellen Geometrie der Trajektorie haben sie aber verschiedene Vorzeichen. Im Zentrum des Schweifes verschwindet die Komponente parallel zum IMF, danach wird sie beim Ausflug etwas stärker als beim Einflug, was durch unser Modell gut wiedergegeben wird. Die Änderung des Vorzeichens der z -Komponente kurz nach 12.00 h ist mit einem stationären Modell nicht zu verstehen, vermutlich haben wir es hier mit einer Unstetigkeit im IMF zu tun. Man erkennt das auch im Betrag der Feldstärke, der hier rascher abfällt als beim

Einflug.

Das Bild 5.25 zeigt, daß wir mit unserem MHD-Modell die gemessenen Magnetfelder von Giacobini-Zinner gut reproduzieren können; nur kurz vor und nach dem Durchflug durch das Zentrum des Schweifes um 11.00 ist das theoretische Feld zu klein. Die Rechnungen von Wegmann (1987) verhalten sich ähnlich. Eine Verbesserung der Situation durch ein zeitabhängiges Modell mit rotierendem IMF kommt bei Giacobini-Zinner nicht in Betracht, da die Messungen im Schweif durchgeführt wurden, die zusätzliche Feldkompression des zeitabhängigen Modells aber vor dem Kern wirksam wird.

Im Vergleich zum Kometen Halley fällt auf, daß auch die einzelnen Feldkomponenten durch das stationäre Modell reproduziert werden können, das IMF bei Giacobini-Zinner erfüllt daher die Bedingung der Stationarität wesentlich besser. Insbesondere scheinen - abgesehen von dem Ereignis kurz nach 12.00 h - keine Unstetigkeiten das IMF zu durchsetzen. ICE hat den Kometen Giacobini-Zinner also in einer "ruhigeren" Phase angetroffen als Giotto den Kometen Halley.

6. ZEITABHÄNGIGE MODELLE FÜR KOMETARE PLASMEN

In diesem Kapitel werden wir untersuchen, wie sich instantane oder kontinuierliche Drehungen des magnetischen Feldes im Sonnenwind auf die Struktur der Kometenschweife auswirken. Insbesondere wollen wir dabei sehen, ob Schweifablösungen durch eine 180° -Drehung (Niedner und Brandt, 1978) oder Bänder mit einer 90° -Drehung des Feldes (Schmidt und Wegmann, 1982) erklärt werden können. Im dritten Abschnitt wollen wir dann feststellen, ob sich das Magnetfeld im Stagnationsbereich durch eine kontinuierliche Drehung des IMF effektiver komprimieren läßt, und ob wir damit die zu geringen Feldstärken der Kometenmodelle gegenüber den von Giotto gemessenen Werten verstehen können. Abschließend soll dann noch untersucht werden, welche Auswirkungen eine plötzliche Änderung der Gasproduktion auf die Struktur des Kometen hat.

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen sind drei stationäre Modelle mit $G = 10^{28}$, 10^{29} , 10^{30} s^{-1} und einer kometaren Ionenmasse $m_c = 30 m_p$. Im übrigen sind die Parameter fast identisch mit denen des idealen Modells im Abschnitt 5.1: $v_c = 1 \text{ km s}^{-1}$, $\sigma = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $\rho_\odot = 5 m_p \text{ cm}^{-3}$, $\vec{v}_\odot = 350 \text{ km s}^{-1} \vec{e}_x$, $T_\odot = 5 \cdot 10^4 \text{ K}$, $\vec{B}_\odot = 5 nT \vec{e}_x$, $\gamma = 2$. Wir verwenden, wie bei dem stationären Modell, ein MULTIGRID mit 33 Stützstellen in jeder Raumrichtung und drei Verfeinerungen. Die Erfahrung zeigt, daß man die wesentlichen Effekte qualitativ und quantitativ auch ohne Verfeinerungen erfassen kann, da die genaue Auflösung des Kernbereichs weniger wichtig ist als die des Schweifs und der magnetischen Diskontinuität.

Zu einem festgelegten Zeitpunkt $t = 0$ werde am sonnenseitigen Rand, der einen Abstand von $2 R_B$ vom Kometen hat, die zur Randfläche tangentielle Komponente des IMF um einen vorgegebenen Winkel gedreht. Das ursprünglich in die z -Richtung deutende Feld ist dann immer noch senkrecht zur Strömung des solaren Windes. Wie beim stationären Modell umhüllt diese an die Materie gefesselte magnetische Diskontinuität den Kometen, und zwar umso schneller, je weiter wir uns von der Schweifachse entfernen.

6.1. 180°-DREHUNG DES MAGNETFELDES

In unserer ersten Simulation kehren wir das IMF des stationären Modells zur Zeit $t = 0$ um. Nach dieser 180°-Drehung deutet es immer noch in die z -Richtung des Koordinatensystems, jedoch mit umgekehrter Polarität. Die Diskontinuität umhüllt den Kern als neutrale magnetische Fläche, weil zwischen den Bereichen entgegengesetzter Polarität das Feld notwendigerweise verschwinden muß. Da das Feld vor und hinter der Diskontinuität gleiche Krümmung und Stärke hat, unterscheiden sich auch die magnetischen Kräfte nicht; einen Einfluß auf die Dynamik können wir aus diesem Grunde nur auf der neutralen Fläche erwarten.

Niedner und Brandt (1978) erklären mit einem phänomenologischen Modell, wie eine 180°-Drehung des Feldes zur Ablösung (Diskonnexion) des gesamten Schweifes führen kann. Ihr Modell ist in dem Bild 6.1 dargestellt. Im Bild A ist das Plasma im stationären Zustand und die magnetische Diskontinuität nähert sich im Sonnenwind dem Kometen. Das Umhüllen des Kerns führt aufgrund der Diffusion der magnetischen Feldlinien im inneren Bereich der Koma zur Rekonnexion der Feldlinien unterschiedlicher Polarität (Bild B), die Feldlinien sind dabei stark gekrümmt und die magnetischen Krümmungskräfte komprimieren das Plasma und treiben es den Schweif hinab. Die Diskonnexion des Schweifes ist die Folge (Bild C). Anschließend kehrt der Komet in den stationären Zustand zurück (Bild D).

Trotz der bestechenden Einfachheit und Anschaulichkeit ist das Modell von Niedner und Brandt (1978) nicht in der Lage, Diskonnexion bei Kometen in hohen heliographischen Breiten zu erklären (Ip und Mendis, 1978). Der Grund ist die Struktur des IMF. Die Trennfläche zwischen den solaren Magnetfeldvektoren unterschiedlicher Polarität ist nämlich nicht eine Ebene, sondern vielmehr eine unregelmäßige Fläche. Auf seiner Bahn durch diese Fläche durchquert ein Komet mehrere Gebiete mit unterschiedlicher magnetischer Polarität. Die Beobachtungen von Pioneer 11 (Smith et al., 1977) haben gezeigt, daß Sektorengrenzen nur in heliographischen Breiten bis zu 16° vorkommen, so daß der Mechanismus Diskonnexion in höheren Breiten nicht erklären kann. Niedner und Brandt (1979) machen zwar darauf aufmerksam, daß die Ausdehnung der Trennfläche zwischen den solaren Magnetfeldern unterschiedlicher Polarität vom Sonnenzyklus abhängt, das Problem bleibt aber dennoch. Scheinbar existiert keine Korrelation zwischen

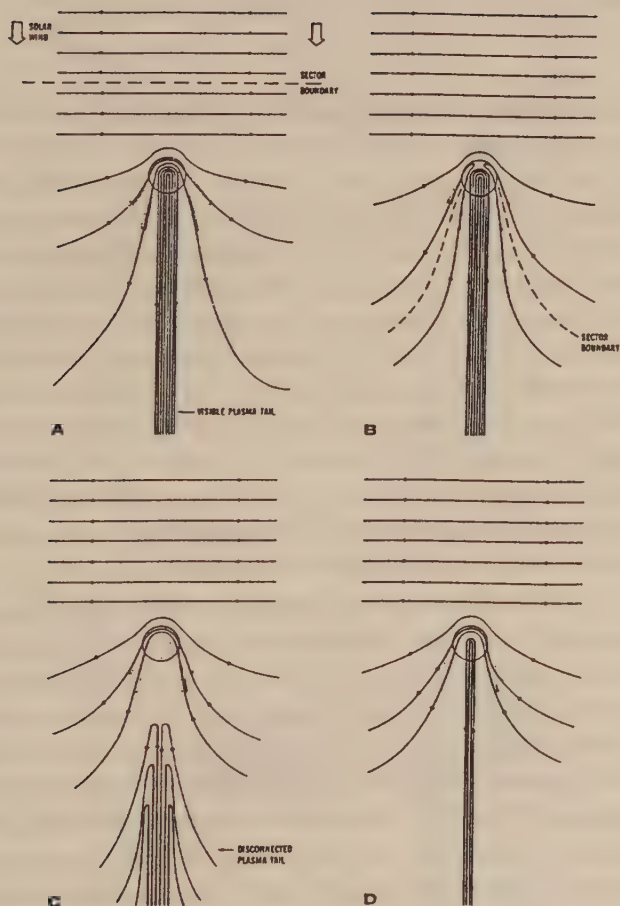


Abb. 6.1: Das Modell von Niedner und Brandt (1978) zur Erklärung von Diskon-
 nexion der Kometenschweife als Folge magnetischer Rekonnektion.

der heliographischen Breite und dem Auftreten von Diskonnexion.

Die numerische Simulation magnetischer Rekonnexion stellt höchste Anforderungen an die Auflösung des numerischen Gitters. Fordern wir als Bedingung einer physikalisch sinnvollen Rekonnexion, daß die magnetische Reynoldszahl, d.h. das Verhältnis von magnetischer Diffusions- zu hydrodynamischer Zeitskala,

$$R_M = \frac{4\pi v l \lambda}{c^2} \simeq 1$$

ist, so folgt mit der Spitzerschen Leitfähigkeit für vollionisierte Plasmen (Hübner, 1982) bei für den Stagnationsbereich typischen Parametern $v = 1 \text{ km s}^{-1}$, $T = 10^5 \text{ K}$ und $n = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ die Leitfähigkeit $\lambda \simeq 10^{14} \text{ s}^{-1}$ und damit die Längenskala l für Rekonnexion zu ungefähr 10 cm . Eine derartige Auflösung liegt natürlich außerhalb der Rechenmöglichkeiten. Da wir die magnetische Diffusion nicht in die magnetische Feldgleichung aufgenommen haben, sollte unser Rechenprogramm auch gar keine Rekonnexion erzeugen. Auf der anderen Seite hat aber jedes numerische Verfahren zur Lösung hydrodynamischer Gleichungen numerische Diffusion, die in unserem Fall aufgrund der Verwendung der Trapezregel bei der Zeitintegration besonders gering ist, sich aber nie vollständig ausschließen läßt. Mit genügender numerischer Diffusion sollte daher jedes Verfahren auch Rekonnexion erzeugen, die aber rein numerischer Natur wäre und nicht die physikalische Realität beschreibt. In jedem Falle aber unterschätzen wir in der numerischen Simulation die nur sehr geringe physikalische Leitfähigkeit.

Das von uns verwendete numerische Verfahren liefert keinerlei Rekonnexion in der Koma, da die numerische Leitfähigkeit zu gering ist. Da wir auch keine Effekte durch Krümmungskräfte erwarten können, ist der Durchlauf der Diskontinuität durch die kometare Atmosphäre an der Struktur des Kometen nicht zu erkennen. In dem Fig. 6.2 sind Dichte, Vektoren des magnetischen Feldes und Isophoten zehn Stunden nach Umkehr des IMF dargestellt. Das Modell hat eine Gasproduktionsrate $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$. Das IMF des anfänglichen stationären Modells hat die Richtung der positiven z-Achse. Die neutrale Fläche des Magnetfeldes, d.h. die Diskontinuität, ist deutlich zu erkennen. Bei den Dichtekonturen sehen wir im hinteren Bereich des Schweifs im Gebiet der neutralen Ebene zwei Strukturen, die eine gewisse Ähnlichkeit mit den beobachteten Bändern haben. Auch in der Simulation von Fedder et al. (1983) treten diese Strukturen in der neutralen Fläche auf,

nur erstrecken sie sich dort weiter in den dichteren Bereich des Schweifs hinein. Bei Integration der Isophoten verschwinden sie in unserer Simulation vollständig, was das Bild 6.2c zeigt.

Eine theoretische Bestätigung der mehr phänomenologischen Theorie von Niedner und Brandt (1978) ist daher mit unserem dreidimensionalen Modell - im Gegensatz zur zweidimensionalen Rechnung von Ogino et al. (1986) - nicht möglich. Die Tatsache, daß wir in unserem Modell keine Rekonnexion bekommen, zeigt uns aber, daß diese Effekte auch nicht als unliebsame Begleiterscheinung bei den anderen Modellen auftreten.

6.2. 90°-DREHUNG DES MAGNETFELDES

In einer zweiten Simulation drehen wir das IMF nur um 90°. Es zeigt dann in die y -Richtung unseres Koordinatensystems. Für das Modell mit Produktionsrate $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ sind die Vektoren des magnetischen Feldes in dem Bild 6.3 sowohl für die Äquatorebene, als auch für die IMF-Ebene nach 1.25 Stunden dargestellt. Die Bezeichnungen der Ebenen seien immer auf das anfängliche stationäre Modell ($t < 0$) bezogen. Das gedrehte Feld liegt daher in der Äquatorebene und das Bild 6.3a zeigt, wie es den Kern parabolisch umhüllt. Nach und nach dreht sich das Feld von der IMF- in die Äquatorebene (Bild b).

6.2.1. BÄNDER

Welche Effekte erwarten wir von einer 90°-Drehung des Feldes? Schmidt und Wegmann (1982) geben durch Simulation einer zeitabhängigen Rechnung mit ihren stationären Modellen eine Erklärung für die Bänder der Kometen. Sie verwenden dabei die im vorigen Kapitel erwähnte Tatsache, daß der Gesamtdruck des Plasmas praktisch unabhängig vom Azimut des Aufpunkts ist. Aus diesem Grunde kombinieren sie an den Isochronen des Magnetfeldes zu verschiedenen Zeiten zwei Modelle mit gegeneinander um 90° verdrehtem IMF. Integrierte Säulendichten (Isophoten) dieses Modells sind in dem Bild 6.4 dargestellt. Bei Aufsicht auf die ursprüngliche Äquatorebene bilden sich nach einigen Stunden den Bändern ähnliche Strukturen aus, wie der Vergleich mit dem Bild 1.1 aus der Einleitung zeigt. Verbindet man die Strukturen, so erhält man gerade die parabolisch geformte magnetische Diskontinuität.

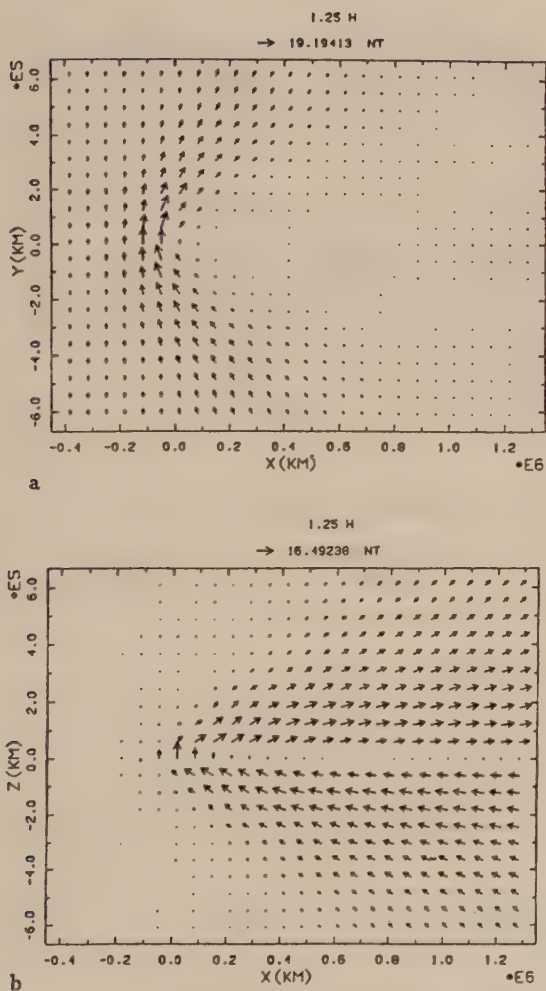


Abb. 6.3: Vektoren des Magnetfeldes für ein zeitabhängiges Modell mit 90° -Drehung des magnetischen Feldes am inneren Rand in Richtung Sonne zur Zeit $t = 1.25 \text{ h}$. (a) zeigt die Äquatorebene, (b) die IMF-Ebene des anfänglich stationären Modells; die Produktionsrate des Kometen ist $G = 10^{20} \text{ s}^{-1}$.

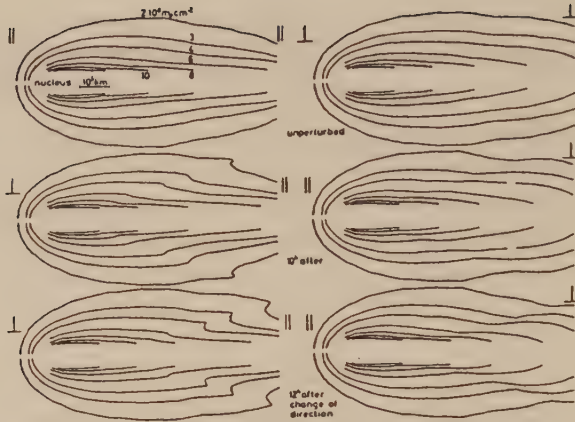


Abb. 6.4: Simulation von Bändern durch Schmidt und Wegmann (1982). Rechts sehen wir Isophoten mit Aufsicht auf die IMF-, links auf die Äquatorebene des anfänglich stationären Modells. Das Modell hat eine Produktionsrate $G = 2 \cdot 10^{30} \text{ s}^{-1}$. || bedeutet, daß das IMF parallel, $\perp$ senkrecht zur Sichtlinie ist.

Die physikalische Ursache der Bänder können wir mit Hilfe des im vorigen Kapitel diskutierten stationären Modells verstehen. Dort hatten wir gezeigt, daß als Folge der magnetischen Krümmungskraft der Schweif in der IMF-Ebene abplattet. Die magnetische Diskontinuität trennt daher zwei Bereiche unterschiedlicher Dichte in der Kometenatmosphäre, wobei in der Äquatorebene die Dichte vor der Diskontinuität höher ist als dahinter, was letztlich in der Projektion der Säulendichten die Bänder erzeugt. Die Streamer sind also eine Folge der Drehung des abgeplatteten Schweifes um 90° an der Felddiskontinuität und von deren Projektion auf die Ebene des Beobachters. Der umgekehrte Effekt in der IMF-Ebene von Bild 6.4 ist wesentlich weniger deutlich ausgeprägt.

Unser zeitabhängiges Modell ist in der Simulation der Bänder leider weniger erfolgreich. In dem Bild 6.5 sind zwei Isophotenkarten in der IMF- und Äquatorebene nach 2.68 Stunden dargestellt. Die Gasproduktionsrate ist $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$, also geringer als in der Simulation von Schmidt und Wegmann (1982) im Bild 6.4. Die Entwicklungszeit entspricht etwa 9.1 h in deren Modell. Auf keiner der beiden

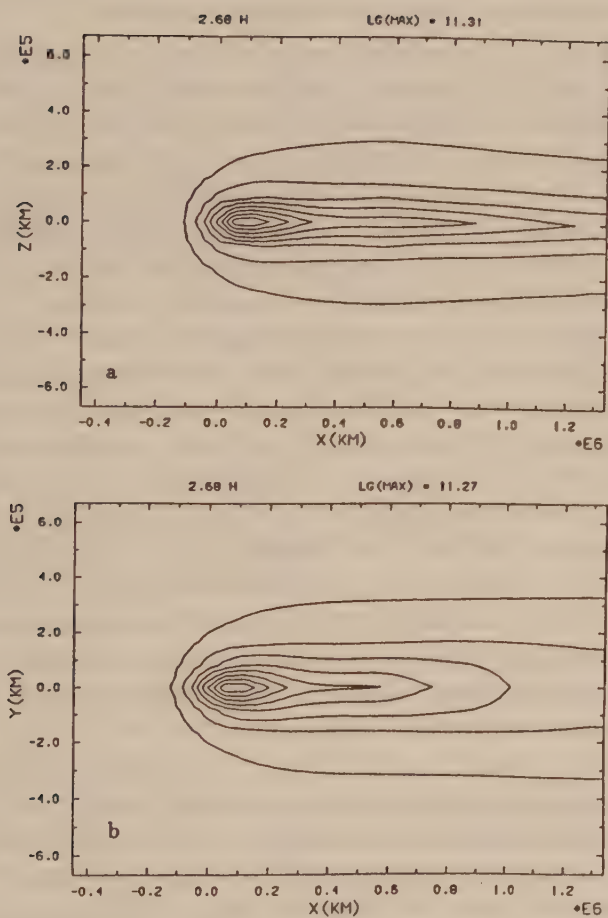


Abb. 6.5: Isophoten des zeitabhängigen Modells mit Drehung des IMF um 90° . Aufsicht auf die IMF- (a) und Äquatorebene (b) 2.68 Stunden nach Änderung der Richtung des IMF. Das Maximum ist logarithmisch in cm^{-2} angegeben, die äußerste Kontur hat eine Intensität von 10% dieses Wertes. Die kometare Gasproduktion ist $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$.

Bilder sind Bänder oder verwandte Strukturen zu erkennen; die zeitabhängige Rechnung unterscheidet sich kaum von einem stationären Modell.

Warum können wir mit der zeitabhängigen Simulation im Gegensatz zum Vorgehen von Schmidt und Wegmann (1982) keine Bänder erzeugen? Der Unterschied zwischen den Modellen ist natürlich die Zeitabhängigkeit, was aber erstaunlicherweise kein Argument für unser Modell ist. Es ist vielmehr der Vorteil des Modells von Schmidt und Wegmann (1982), daß durch die Superposition stationärer Lösungen die Magnetfelddiskontinuität immer absolut "scharf" ist, d.h. zwischen zwei Punkten des Gitters liegt. Eine zeitabhängige Simulation in mehreren Dimensionen ist hingegen aufgrund der numerischen Diffusion nicht in der Lage, eine Diskontinuität mit solch hoher Genauigkeit aufzulösen. Wir können dem Bild 6.2b und Bild 6.3 zwar entnehmen, daß die Diskontinuität recht scharf ist, was darauf zurückzuführen ist, daß wir durch Verwendung der diffusionsfreien Trapezregelintegration in der Zeit und dem Verzicht einer Anwendung des FCT auf das Magnetfeld nur ein Minimum an Magnetfelddissipation durch die Entwicklung (3.10) zulassen; dennoch wird, auf deren Produktionsrate umgerechnet, die Diskontinuität auf ungefähr 10^5 km verbreitert, was in der Größenordnung der von Schmidt und Wegmann (1982) gefundenen Struktur liegt. Um in einem äquidistanten Gitter eine erforderliche Auflösung von 10^4 km zu erreichen, ist eine Erhöhung der Zahl der Stützstellen in jeder Richtung um einen Faktor zehn und damit des Rechenaufwands und Speicherbedarfs um einen Faktor 1000 erforderlich, was derzeit außerhalb der Rechenmöglichkeiten liegt.

Einen Hinweis auf Bänder erhalten wir, wenn wir die Auflösung durch Reduzierung der Gitterausdehnung um einen Faktor vier verbessern. Wir legen ein Modell mit einer kometaren Gasproduktion $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$ zugrunde. Bugstoßwellenabstand und Entwicklungszeit sind dann vergleichbar mit Schmidt und Wegmann im Bild 6.3. Außerdem wird wegen der stärkeren Abplattung der Kometenschweife die Ausbildung von Bändern mit wachsendem G zusätzlich begünstigt. Wir rechnen 10^6 km in den Schweif hinein und lösen $3 \cdot 10^4 \text{ km}$ auf. Die Isophoten in der Äquatorebene dieses Modells werden in dem Bild 6.6 gezeigt. Wir sehen dort Andeutungen einer Schweifstruktur, die man als schwach aufgelöste Bänder interpretieren kann. Dieses Ergebnis ist zwar keine Bestätigung der Simulation von Schmidt und Wegmann (1982) durch das zeitabhängige Modell, es

8.97 H

LG(MAX) = 12.41

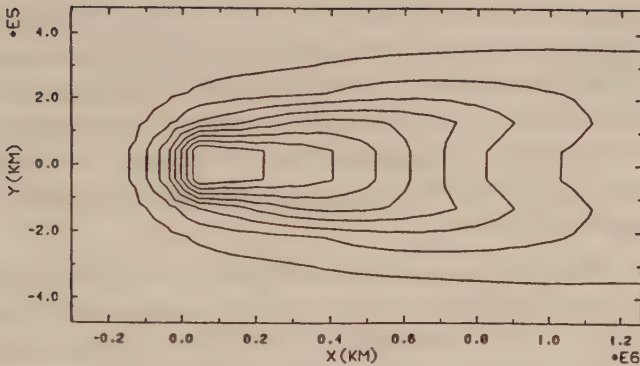


Abb. 6.6: Isophoten in der Äquatorebene 8.97 h nach Drehung des IMF um 90° für ein Modell mit kometarer Gasproduktion $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$ und einer besseren Auflösung des Gitters als im Bild 6.5.

weist aber zumindest in die richtige Richtung. Für mich steht es außer Zweifel, daß eine genauere, die Grenzen heutiger Möglichkeiten sprengende Rechnung die von Schmidt und Wegmann (1982) geforderten Bänder zumindest qualitativ reproduzieren könnte. An dieser Stelle müssen wir uns aber leider mit den Andeutungen in Bild 6.6 zufrieden geben.

Die zeitabhängigen Rechnungen von Fedder et al. (1983) geben auch eine Erklärung der Bänder, die im wesentlichen mit der von Schmidt und Wegmann (1982) übereinstimmt. Bei ihnen ist die Dichtediskontinuität stärker ausgeprägt, da, wie bei den stationären Modellen im vorigen Kapitel erwähnt, der Schweif wesentlich stärker abgeplattet ist. Die Autoren behaupten nun, daß bei Projektion des verdrehten Schweifes auf die Ebene des Beobachters eine den Bändern ähnliche Struktur zu erkennen sein müsse, Isophotenkarten berechnen sie jedoch nicht. Von der 180° -Drehung des Feldes wissen wir aber, daß es gefährlich sein kann, von Dichtestrukturen auf Isophoten zu schließen.

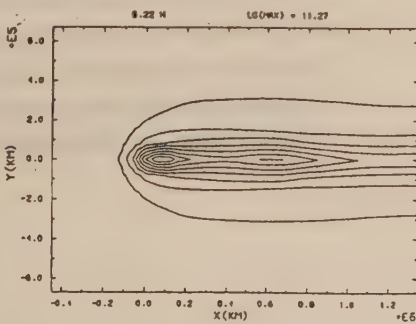
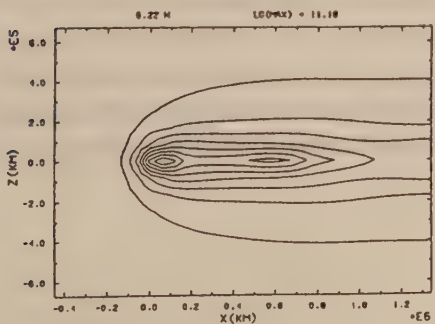
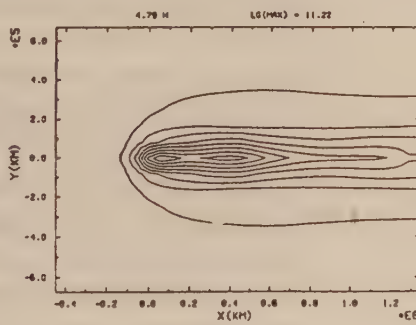
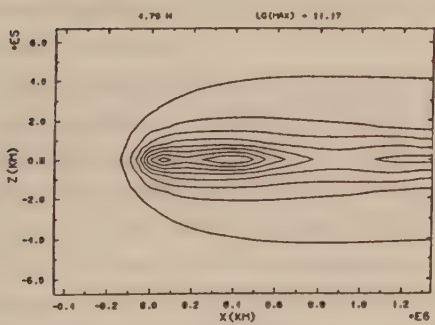
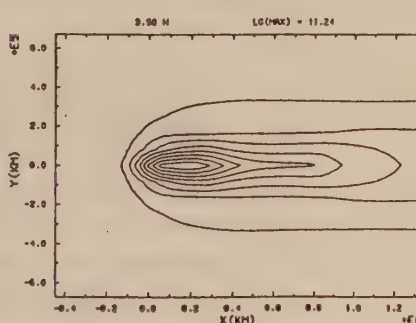
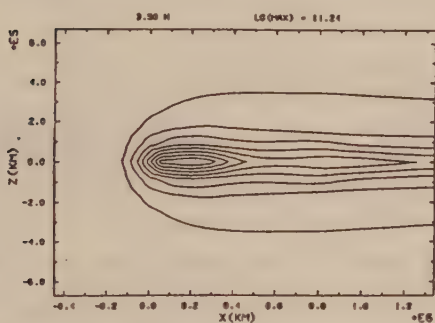
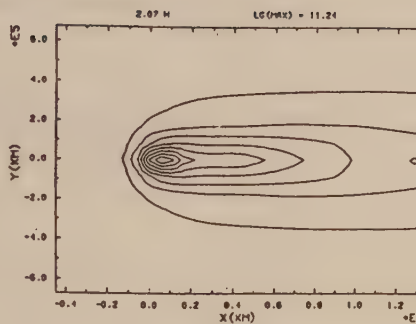
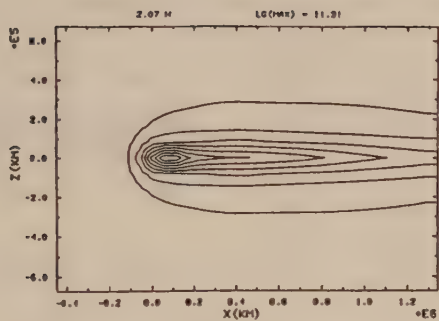
6.2.2. SCHWEIF-KONDENSATIONEN

6.2.2.1. DIE MODELLRECHNUNG

Obwohl unser Modell nicht in der Lage war, die zu erwartenden Bänder mit Hilfe einer 90° -Diskontinuität des IMF zu erklären, liefert diese Störung einen anderen, aber völlig unerwarteten zeitabhängigen Effekt im Kometenschweif: Eine klumpige, wolkenartige Struktur, die einige Zeit nach dem Start der Diskontinuität gebildet wird. Wir wollen das Phänomen zunächst an dem Modell mit kometarer Gasproduktion $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ untersuchen und anschließend die Abhängigkeit von der Produktionsrate diskutieren.

In dem Bild 6.7 ist eine Folge von Momentaufnahmen dieses Modells zu sehen. Dort sind die Isophoten in IMF- und Äquatorebene in Analogie zu dem Bild 6.5 dargestellt. Etwa eine Stunde nach Drehung des IMF finden wir die ersten Anzeichen einer Aufhellung hinter dem Kometenkern. Nach drei Stunden löst sich das aufgehellte Gebiet von der Koma ab und wandert allmählich in den Schweif. Die Geschwindigkeit dieser Schweif-Kondensation, wie wir das Phänomen fortan nennen wollen, nimmt dabei von 20 bis 70 km s^{-1} zu, bis sie schließlich den in unserer Rechnung berücksichtigten Bereich verläßt. Zu diesem Zeitpunkt ist allerdings das Gebiet der inneren Koma schon wieder heller als die Schweif-Kondensation.

Der Verlauf der Helligkeiten von Schweif-Kondensation und Koma als Funktion der Zeit ist in dem Bild 6.8 gezeigt. Wir sehen hier, wie sich die Koma nach etwa einer Stunde aufhellt, und die Schweif-Kondensation nach drei Stunden die Koma überstrahlt. Sechs Stunden nach Drehung des IMF hat die Koma ein Intensitätsminimum erreicht und geht dann wieder gegen den stationären Wert. Nach sieben Stunden übertrifft sie die Helligkeit der Schweif-Kondensation, die dann immer schwächer wird, bis sie vom Schweif nicht mehr zu unterscheiden ist. Die Koma erreicht nicht mehr die Helligkeit des ursprünglichen stationären Ausgangsmodells, da die Säulendichten in dem stationären Zustand des Modells mit um 90° gedrehtem IMF geringer sind.



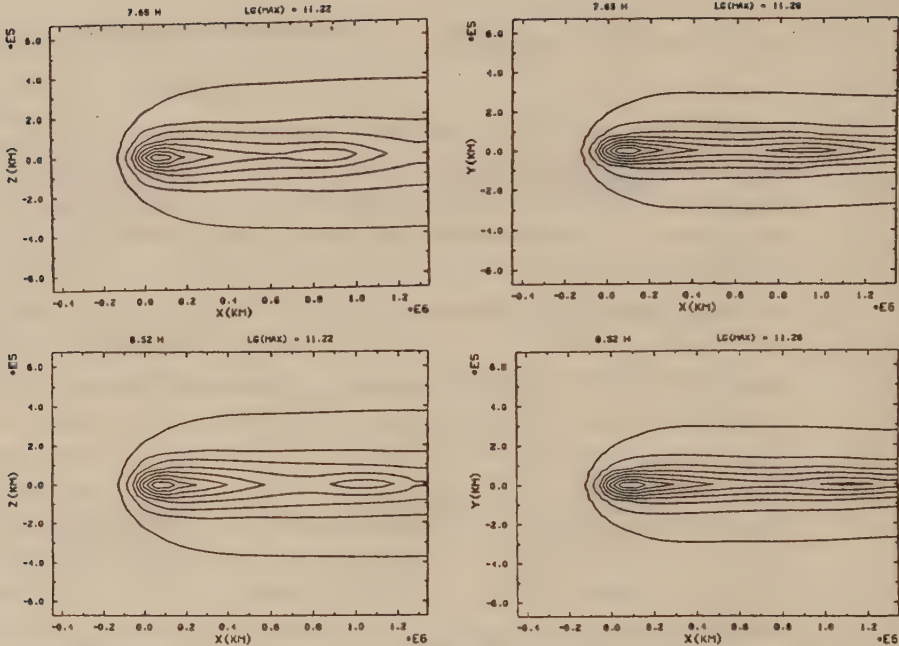


Abb. 6.7: Isophoten (Säulendichte kometarer Ionen) einer zeitabhängigen Simulation mit 90° -Drehung des IMF. Die Isophoten sind in sechs Momentaufnahmen der Entwicklung dargestellt, links die IMF- und rechts die Äquatorebene, bezogen auf das stationäre Anfangsmodell; Entwicklungszeit in Stunden nach Drehung des IMF. Das Maximum ist logarithmisch in cm^{-2} angegeben, die äußerste Kontur hat eine Intensität von 10% dieses Wertes. Das Maximum liegt während des Intervalls von drei bis sechs Stunden nach der Drehung des IMF in der Schweif-Kondensation, vorher und nachher im innersten Bereich der Koma.

6.2.2.2. MECHANISMEN ZUR BILDUNG DER SCHWEIF-KONDENSATION

Welches sind die physikalischen Ursachen der Schweif-Kondensation bei um 90° gedrehtem IMF? Zur Beantwortung dieser Frage wollen wir zunächst untersuchen, welcher Natur das Plasma ist, aus dem die Schweif-Kondensation gebildet wird. Handelt es sich um Gas, das aus der Koma in den Schweif strömt oder bloß um eine Welle, die das Plasma im Schweif lokal verdichtet? Oder sind es gar nur

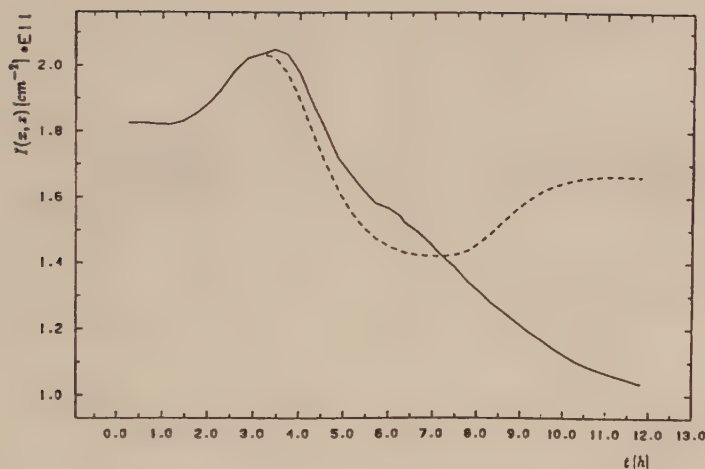


Abb. 6.8: Helligkeit (Säulendichte kometarer Ionen) $I(x, z)$ von Koma (gestrichelt) und Schweif-Kondensation (durchgezogen) in der IMF-Ebene als Funktion der Entwicklungszeit nach Drehung des IMF um 90° für das Modell mit $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$. Gezeigt ist die IMF-Ebene, bezogen auf das stationäre Anfangsmodell.

Projektionseffekte, die durch die Drehung des Schweifes an der 90° -Diskontinuität entstehen?

Projektionseffekte können wir ausschließen, wenn wir die Linien gleicher Dichte im Bild 6.9 betrachten. Dargestellt sind Konturen in IMF- und Äquatorebene für stationäres und zeitabhängiges Modell 5.8 Stunden nach Drehung des Feldes. Die innersten 1 bis $1.5 \cdot 10^5 \text{ km}$ des Schweifes sind bereits wieder im stationären Zustand, die Dichtekonturen in der IMF-Ebene des entwickelten Modells sind praktisch identisch mit denen in der Äquatorebene des anfänglichen stationären Modells. Zwischen 5 und $7 \cdot 10^5 \text{ km}$ im Schweif erkennen wir eine Verdichtung, die gerade mit dem Maximum in den Isophoten zusammenfällt und die wir mit der Schweif-Kondensation identifizieren.

Bei der Verdichtung handelt es sich tatsächlich um Materie, die ihren Ursprung in Bereichen nahe des Kerns hat. Das wird klar, wenn wir die Entwicklung des mittleren Molekulargewichts in dem Bild 6.10 betrachten. Die durchgezogene

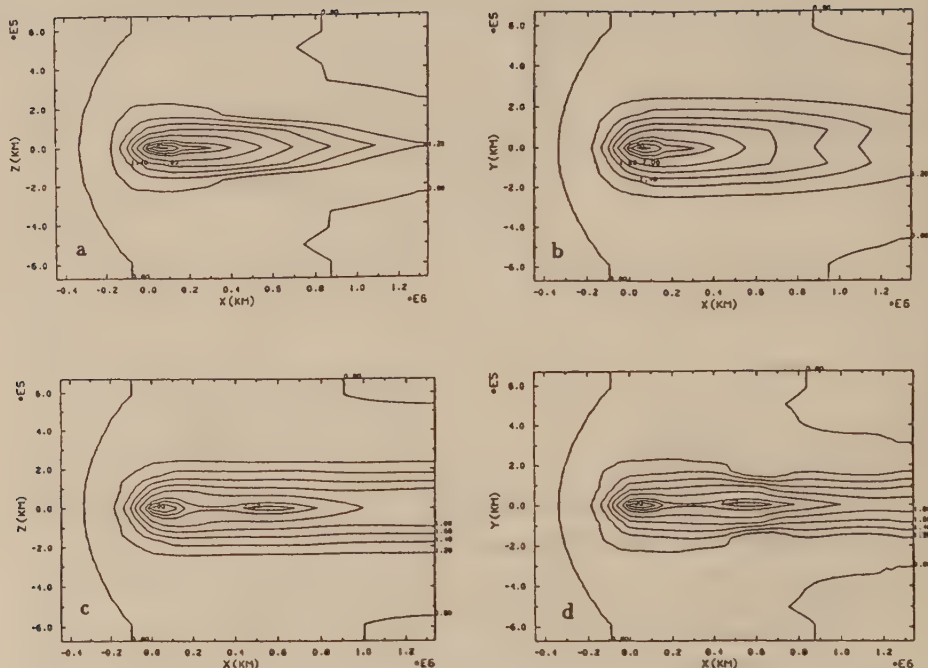


Abb. 6.9: Linien gleicher Dichte im anfänglichen stationären Modell (a,b), und 5.8 Stunden nach Drehung des IMF um 90° (c,d) in dem Modell mit Gasproduktion $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$. (a) und (c) zeigen die ursprüngliche IMF-, (b) und (d) die ursprüngliche Äquatorebene. Die Dichten sind logarithmisch in $m_p \text{ cm}^{-3}$ angegeben.

Kurve stellt das Molekulargewicht am Ort der Schweif-Kondensation dar, die gestrichelte an den entsprechenden Orten des anfänglichen stationären Modelles und die gepunktete in der Koma in der Umgebung des Kometenkerns. Bis zur Ablösung der Schweif-Kondensation (vgl. auch mit dem Bild 6.8) sind die Molekulargewichte von Koma und Schweif-Kondensation identisch, bei Kompression des Plasmas wird das in der Koma etwas erhöht. Wenn sich die Kondensation von der Koma trennt, nimmt das Molekulargewicht in der Schweif-Kondensation geringfügig ab, bleibt aber ganz deutlich über dem des anfänglichen stationären Modells; es ist dort

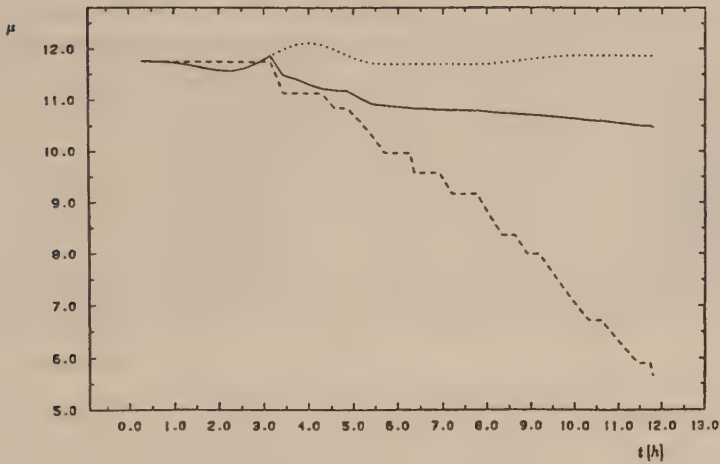


Abb. 6.10: Die Entwicklung des mittleren Molekulargewichts mit der Zeit. Durchgezogen: In der Schweif-Kondensation; gestrichelt: Im anfänglichen stationären Modell an den der Schweif-Kondensation entsprechenden Orten; gepunktet: Im zeitabhängigen Modell in der Koma in unmittelbarer Umgebung des Kometenkerns. Gezeigt ist wiederum das Modell mit kometarer Gasproduktionsrate $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$.

praktisch konstant bei $\mu \simeq 11$ und entspricht damit in etwa dem in der Umgebung des Kometenkerns: Die Schweif-Kondensation muß also hauptsächlich aus dem "schweren" Plasma der Koma bestehen. Es handelt sich also nicht um eine Welle, die bereits im Schweif vorhandenes Plasma komprimiert und lokale Dichteerhöhungen erzeugt. Die Schweif-Kondensation muß in der Koma gebildet und anschließend in den Schweif transportiert werden. Aus diesem Grunde wollen wir im folgenden eine "Bildungsphase" und eine "Transportphase" unterscheiden.

Die Bildung der Schweifkondensation ist auf jeden Fall ein magnetischer Effekt, der von den Lorentzkraften der die Koma umhüllenden magnetischen Diskontinuität verursacht wird. Im Gegensatz zu der Theorie von Niedner und Brandt (1978) ist Diskonnexion des Schweifes als Folge magnetischer Rekonnexion des Feldes bei einer 90° -Drehung nicht möglich. Prinzipiell kommen daher magnetische Druck- und Krümmungskräfte in Betracht.

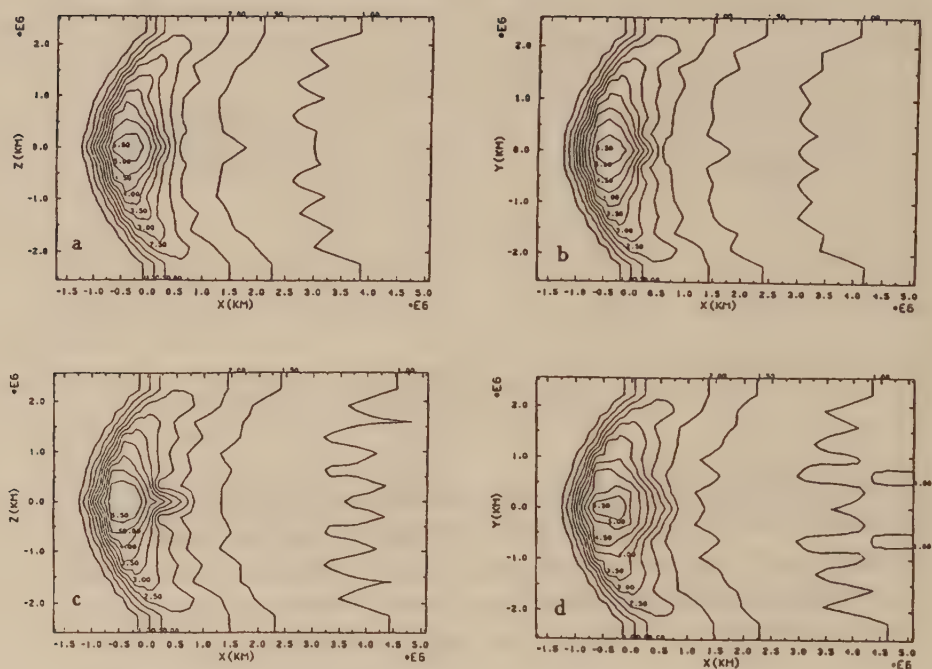


Abb. 6.11: Isobaren des gesamten Druckes [$10^{-9} \text{ dyn cm}^{-2}$] in der IMF-(a,c) und Äquatorebene (b,d) für das anfängliche stationäre Modell mit $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ (a,b) und 3.3 Stunden nach Drehung des IMF um 90° (c,d).

Die Druckbilanz hängt nicht allein vom magnetischen, sondern vom Gesamtdruck des Plasmas ab. In dem Bild 6.11 ist die Summe von magnetischem und thermischem Druck in IMF- und Äquatorebene für das anfängliche stationäre Modell und für einen entwickelten Zustand nach 3.3 Stunden gezeigt. Die Isobaren sind in allen vier Diagrammen praktisch identisch. Die Unterschiede beschränken sich auf die kernfernen Bereiche des Schweifs. Hier scheint der Druck der numerischen Lösung etwas zu "wackeln" (Isobare mit $10^{-9} \text{ dyn cm}^{-2}$), was darauf zurückzuführen ist, daß der Druck über weite Bereiche konstant ist und sich kleine numerische Fehler in der Darstellung stark bemerkbar machen. Den Diagrammen

entnehmen wir zwei ganz wichtige Eigenschaften des kometaren Plasmas: Einerseits ist der Gesamtdruck vom Azimut des Aufpunktes nahezu unabhängig, andererseits unterscheiden sich stationäres und zeitabhängiges Modell nur unwesentlich. Diese Unabhängigkeit bleibt auch während des Durchgangs der magnetischen Diskontinuität erhalten, was Schmidt und Wegmann (1982) bereits bei ihren stationären Modellen vermuteten. Aus diesem Grunde, zusammen mit der relativen zeitlichen Konstanz des Gesamtdruckes, müssen wir magnetische Druckkräfte als Ursache der Schweif-Kondensation ausschließen; dafür können nur die magnetischen Krümmungskräfte verantwortlich gemacht werden. Diese waren bereits bei dem stationären Modell für die Abplattung des Schweifes verantwortlich und spielen auch hier die entscheidende Rolle.

Die Wirkung der magnetischen Krümmungskraft auf das Plasma in der Koma ist in dem Bild 6.12 gezeigt. Dargestellt sind Dichte, $B_{x,tot} = B_x(x, \Delta l, 0) + B_x(x, 0, \Delta l)$ und magnetische Krümmungskraft $\frac{1}{4\pi}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$ an einem "Meßpunkt" 16000 km vor dem Kern des Kometen auf der Linie Sonne-Komet als Funktion der Zeit. In dem Bild b wird in derselben Zeitskala gezeigt, wie und wann sich die magnetische Diskontinuität durch unseren "Meßpunkt" bewegt. Wir sehen dort gestrichelt die x-Komponente des Magnetfeldes $B_x(x, 0, \Delta l)$ mit $x = -1.6 \cdot 10^4$ km in Richtung der Sonnenwindströmung in einer Entfernung $\Delta l = 5.5 \cdot 10^4$ km von der Linie Komet-Sonne in Richtung des ursprünglichen IMF. Da nach der Drehung $\vec{B}_\odot = B_\odot \vec{e}_y$ ist, gilt dann $B_x(x, 0, \Delta l) \simeq 0$. Gepunktet dargestellt ist die Komponente $B_x(x, \Delta l, 0)$ in derselben Entfernung von der Achse, aber in Richtung des gedrehten Feldes, durchgezogen ist die Summe $B_{x,tot}$ dieser Komponenten, die auch noch punktiert in das Bild a eingezeichnet ist. $B_{x,tot}$, sowie die Darstellung seiner Komponenten im Bild b demonstrieren, wann die magnetische Diskontinuität unseren Meßpunkt erreicht und hilft uns dabei Änderungen der magnetischen Kräfte mit der Drehung im IMF zu korrelieren. Nach ungefähr 1.5 h erreicht die Diskontinuität unseren "Meßpunkt", das ursprüngliche Feld (gestrichelt) nimmt ab, das neue (gepunktet) zu. Ganz eindeutig können wir den Durchgang der magnetischen Diskontinuität mit einem Maximum in den Krümmungskräften und der Dichte in Bild a korrelieren: Durch das Umhüllen des Kerns durch das alte IMF vor und das neue IMF hinter der Diskontinuität werden für einen relativ kurzen Zeitraum von $\simeq 1$ h die Krümmungskräfte beider Komponenten wirksam und komprimieren

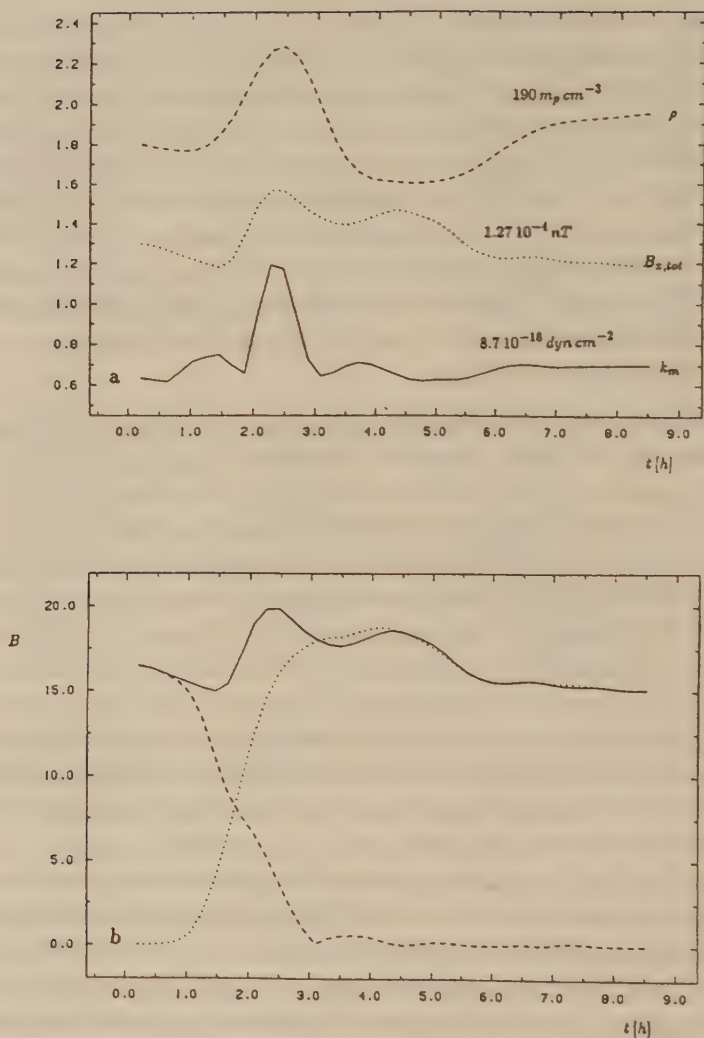


Abb. 6.12: (a): Dichte (gestrichelt), $B_{x,tot} = B_x(x, \Delta l, 0) + B_x(x, 0, \Delta l)$ mit $\Delta l = 5.5 \cdot 10^4 \text{ km}$, und magnetische Krümmungskräfte k_m bei $x = -16000 \text{ km}$ vor dem Kern des Kometen als Funktion der Zeit nach der Drehung des IMF um 90° , markiert durch die Einheiten der einzelnen Größen. (b): Nochmals $B_{x,tot}$ [nT] (durchgezogen) und seine beiden Summanden an den Orten $(x, 0, \Delta l)$ (gestrichelt) und $(x, \Delta l, 0)$ (gepunktet).

das Plasma in zwei Richtungen.

In der Transportphase umströmt dann das Plasma mit der erhöhten Dichte den Kometen und läuft längs der Achse durch den Schweif. Die Geschwindigkeiten liegen unmittelbar nach der Bildungsphase um 10 km s^{-1} . Die kurzfristig erhöhten Krümmungskräfte des magnetischen Feldes sorgen dabei dafür, daß das Plasma effektiver in den Schweif abströmt; die Dichte fällt daher nach Ausbildung der Schweif-Kondensation etwas unter den Wert des anfänglichen stationären Modells ab, der Druck bleibt in guter Näherung konstant; hier war auch die Heligkeits im Bild 6.8 minimal. Das neue IMF kann jetzt weiter in die Koma vordringen, wodurch es auch stärker komprimiert wird und ein zweites Maximum der x -Komponente entsteht. Dies hat aber offensichtlich keine nennenswerte Auswirkung auf die Krümmungskräfte und relaxiert dann allmählich gegen die Stationarität. Von wirklicher Bedeutung für die Schweif-Kondensationsphänomene ist nur die Zeitspanne, in der sich die Krümmungskräfte beider Felder addieren und das Plasma in zwei Richtungen verdichten. Wir hatten mit Hilfe von Bild 6.11 gezeigt, daß der Gesamtdruck bezüglich des Azimuts des Aufpunkts im Schweif beim Durchgang der magnetischen Diskontinuität praktisch konstant bleibt, wodurch der Gradient des Gesamtdruckes in radialer Richtung im Schweif verschwindet. Dadurch kann sich die Schweif-Kondensation ohne thermisch zu expandieren durch den Schweif bewegen. Auch der Druckgradient in antisolarer Richtung reicht nicht zum Zerstören der Schweif-Kondensation aus. Den Isophoten im Bild 6.8 können wir zwar entnehmen, daß die Schweif-Kondensation in axialer Richtung immer ausgedehnter wird, in diesem Modell ist aber der Druckgradient nicht stark genug, um sie völlig zu "zerreißen". Da die magnetischen Feldlinien im Schweif nur wenig gekrümmt sind, haben dort die Krümmungskräfte wenig Einfluß auf die Dynamik der Schweif-Kondensation, und es kann auch keine Korrelation zwischen dem Durchgang der magnetischen Diskontinuität und der Bewegung der Schweif-Kondensation nach dem Abtrennen von der Koma gefunden werden.

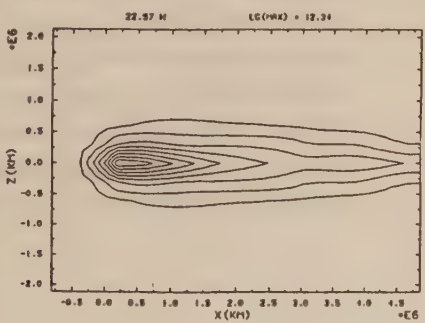
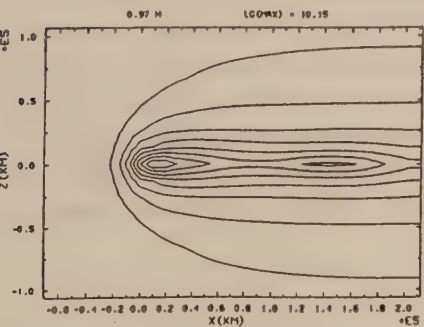
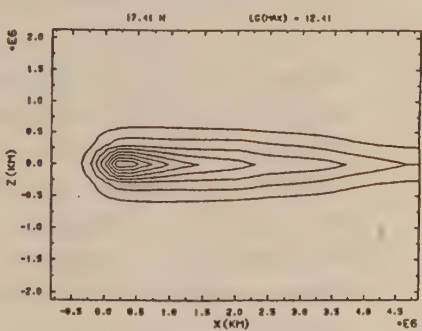
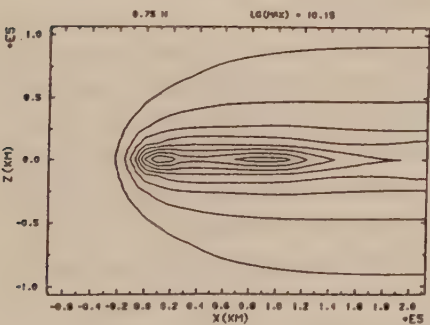
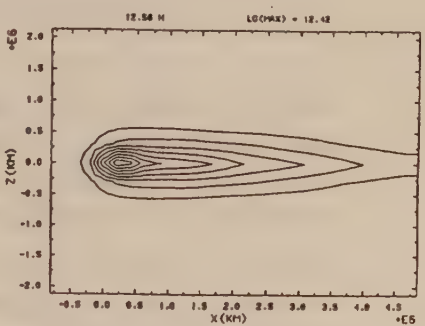
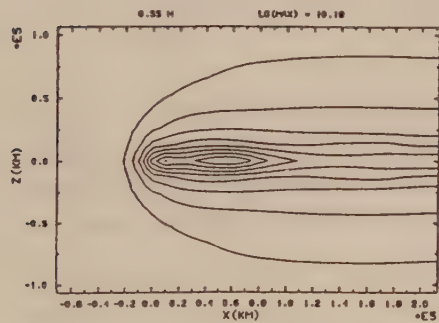
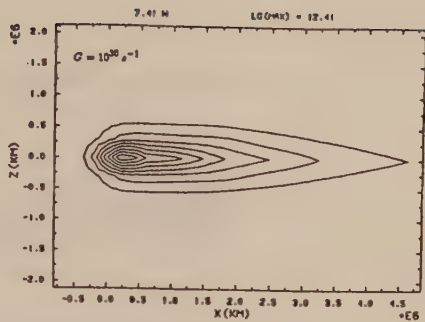
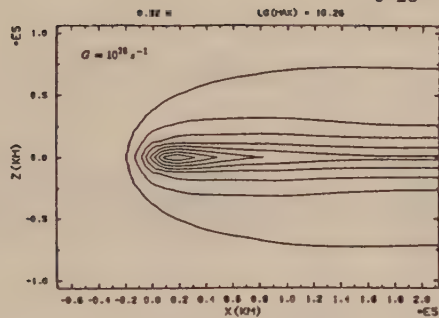
6.2.2.3. ABHÄNGIGKEIT DER BILDUNG VON SCHWEIF-KONDENSATIONEN VON DER GASPRODUKTION DES KOMETEN

Wir wollen nun untersuchen, ob die Bildung der Schweifkondensation von der Produktionsrate G abhängt. Erinnern wir uns dabei zunächst an unsere Diskussion im Abschnitt 5.1.2, in dem wir die Abhängigkeit der stationären Modelle diskutierten. Dort hatten wir gezeigt, daß die als lineare Kometen definierten Objekte ($G \lesssim 10^{29} \text{ s}^{-1}$), bei denen der Bugstoßwellenabstand klein gegen die Längenskala für Ionisation ist, in relativen Einheiten $\vec{\eta} = \vec{x}/R_B$ identische Strömungseigenschaften haben, sofern die betrachteten Abstände klein gegen die Ionisationslängenskala sind. Wir gehen jetzt genauso wie dort vor und schreiben die Kontinuitätsgleichung in dimensionsfreien Variablen $\rho^* = \rho/\rho_\odot$ und $\vec{v}^* = \vec{v}/v_\odot$, sowie in den relativen Orts- und Zeitkoordinaten $\vec{\eta} = \vec{x}/R_B$ und $\tau_\odot = v_\odot t/R_B$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_\odot} \rho^* + \vec{\nabla}_{\vec{\eta}} \cdot (\rho^* \vec{v}^*) \simeq \frac{1}{\gamma^2 - 1} \eta^{-2} \left(1 - \eta \frac{R_B}{R_i} \right),$$

wobei $R_i = v_c/\sigma$ die Längenskala für Ionisation ist. Als Normierungslänge R_B verwenden wir dabei wieder die strenggenommen nur für $R_B/R_i \ll 1$, also lineare Kometen, geltende Näherung Gl.(2.5). Diese Normierung ist wegen der "Erschöpfung" des Neutralgases wiederum nur solange gültig, wie wir Abstände $r \ll R_i$ vom Kern des Kometen betrachten, was zwar in der Koma immer der Fall ist, nicht aber im Schweif. Mit diesen Einschränkungen unterscheidet sich daher die Entwicklung von linearen Kometen in den Zeiteinheiten $\tau_\odot$ an einem festen Ort η praktisch nicht, was auch für Bildung und Transport von Schweifkondensationen gilt.

Wir hatten die Schweif-Kondensation als Folge einer 90° -Drehung des IMF anhand eines Modellkometen mit einer kometaren Gasproduktion $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ diskutiert. Dabei handelt es sich um einen Kometen, der auf der Grenze zwischen Linearität und Nichtlinearität liegt. Um Abhängigkeiten von der Gasproduktionsrate zu untersuchen, betrachten wir uns in dem Bild 6.13 die Isophoten eines Modells mit $G = 10^{28} \text{ s}^{-1}$, das linear ist, und $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$, das nichtlinear ist. Ganz analog zu dem Bild 6.7 ist eine Zeitsequenz aufgetragen, die Zeiten entsprechen in relativen Einheiten $\tau_\odot = \frac{t}{R_B} v_\odot$ den Zeiten aus Bild 6.7, wobei wir das letzte Diagramm fortgelassen haben. R_B wird mittels Gl.(2.4) berechnet. In relativen Ortseinheiten $\vec{\eta} = \vec{x}/R_B$ umfassen die Diagramme denselben Bereich.



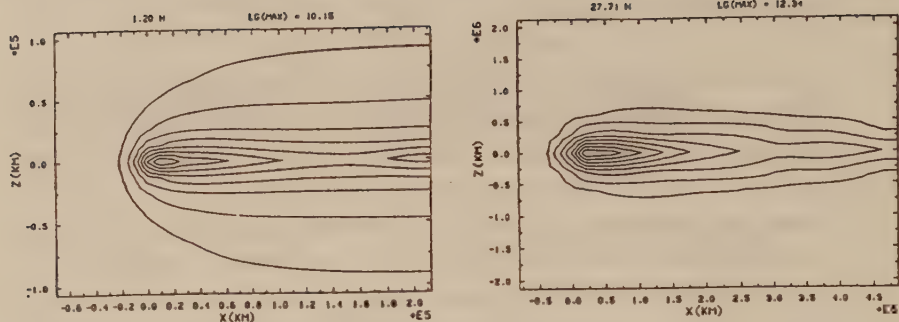
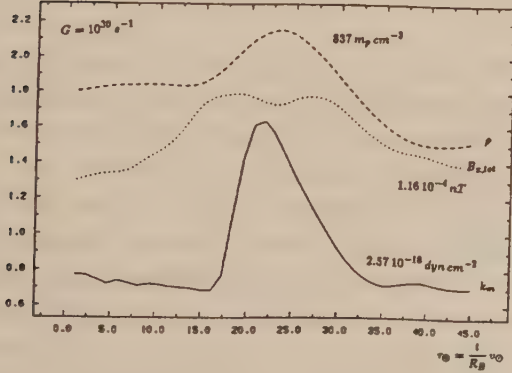
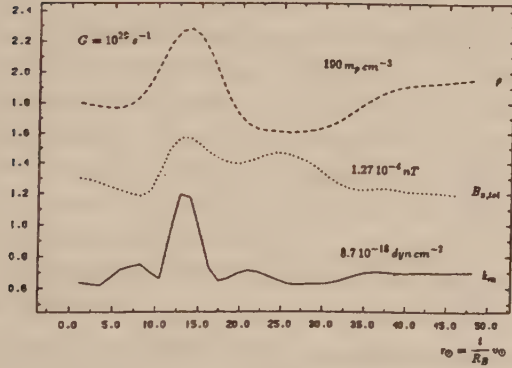
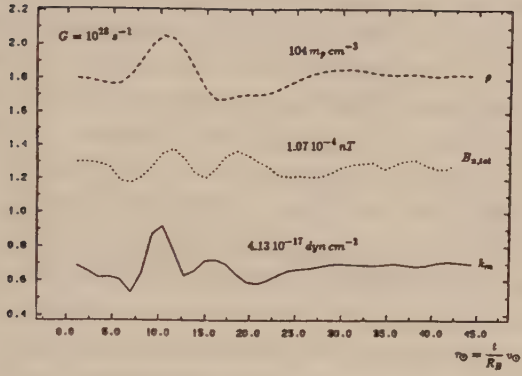
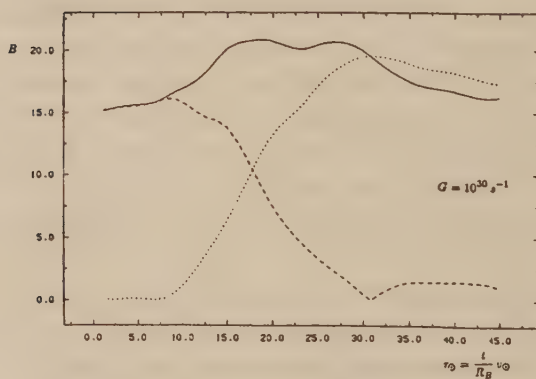
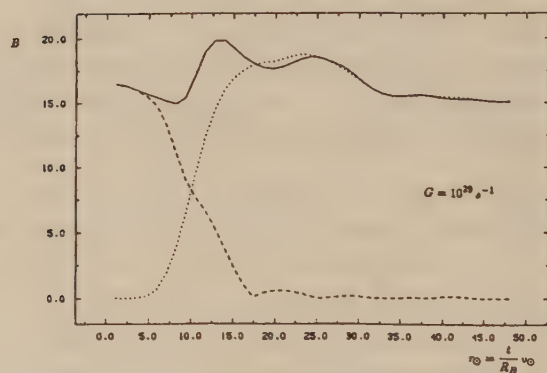
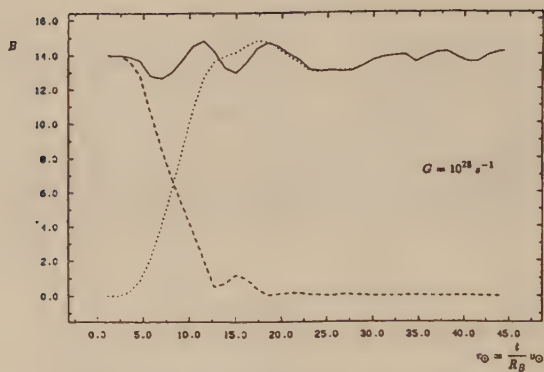


Abb. 6.19: Isophotenkarten des Modells mit $G = 10^{28} \text{ s}^{-1}$ (links) und $G = 10^{30}$ (rechts) an den in den relativen Einheiten $\tau_{\odot} = t v_{\odot} / R_B$ dem Bild 6.7 entsprechenden Zeitpunkten. Dargestellt ist die Aufsicht auf die anfängliche IMF-Ebene. In den relativen Einheiten $\tilde{r} = \tilde{x} / R_B$ haben alle Diagramme dieselben Ortseinheiten.

Ein Vergleich der drei Modelle mit verschiedener Produktionsrate zeigt, daß die Schweif-Kondensation mit steigender Produktionsrate weniger stark ausgeprägt ist, bei $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$ wird sie überhaupt nicht gebildet.

Um der Ursache für die Abhängigkeit von G auf die Spur zu kommen, betrachten wir zunächst die Bildungsphase der Schweif-Kondensation. Dazu sind die Krümmungskräfte, Dichten und Magnetfelder aller drei Modelle in dem Bild 6.14 gezeigt, die Darstellung ist dieselbe wie im Bild 6.12, nur werden relative Zeiteinheiten $\tau_{\odot}$ verwendet. Der "Meßpunkt" hat in den relativen Orsteinheiten $\tilde{r} = \tilde{x} / R_B$ dieselben Koordinaten. Die Diagramme sollten also für lineare Kometen identisch sein. Daher können wir dem Bild auch entnehmen, daß sich die Modelle zwischen $G = 10^{28} \text{ s}^{-1}$ und $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ weniger unterscheiden als die zwischen 10^{29} s^{-1} und $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$. Das Modell mit $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ ist also schon schwach nichtlinear. Wir werden dennoch die Grenze zwischen linearen und nicht-linearen Kometen bei 10^{29} s^{-1} belassen, da sich ober- und unterhalb dieses Wertes die Eigenschaften am meisten unterscheiden. Ein Vergleich der Modelle zeigt, daß die Dichten mit wachsender Produktionsrate zunehmen, so wie wir das von den stationären Modellen erwarten würden. Die magnetischen Krümmungskräfte nehmen mit der Produktionsrate ab, wohingegen der Unterschied in der Feldstärke





b

Abb. 6.14: Wie Bild 6.12, nur für alle drei Modelle mit $G = 10^{28}$, $G = 10^{29}$ und $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$. Der "Messpunkt" hat in allen Modellen in relativen Einheiten $\bar{\eta} = \bar{x}/R_B$ dieselben Koordinaten. Abszisse in relativen Einheiten $\tau_{\odot} = t v_{\odot}/R_B$.

nicht so stark ist, da die Feldkompression im wesentlichen von den Parametern des solaren Windes bestimmt wird, die in allen Modellen gleich sind. Von den stationären Modellen wissen wir, daß nichtlineare Kometen ($G \gtrsim 10^{29} \text{ s}^{-1}$) eine in relativen Einheiten vergleichsweise große Koma besitzen. Durch die größere Koma in radialer Richtung vom Kern ist das Magnetfeld bei den nichtlinearen Kometen auch nicht so stark gekrümmt wie bei den linearen, für die $G \lesssim 10^{29} \text{ s}^{-1}$ gilt, so daß auch die Krümmungskräfte geringer sind. Durch die dichtere, langsamere Strömung durch die Koma können die Krümmungskräfte aber auch länger wirken, so daß die relative Dichteerhöhung wiederum sehr ähnlich ist. Die Bildungsphase der Schweif-Kondensation durch magnetische Kräfte unterscheidet sich also bei den Modellen mit verschiedener Gasproduktionsrate kaum. Wir betrachten sie daher als unabhängig von der Gasproduktion des Kometen.

Die Differenzen zwischen den Modellen mit unterschiedlicher Gasproduktionsrate müssen also in der Transportphase begründet sein. Aufgrund der zeitlichen Unabhängigkeit des Gesamtdruckes vom Azimut des Aufpunktes im Schweif kommen nur Unterschiede im Transport in antisolarer Richtung als Ursache der Abhängigkeit von G in Betracht. Bei der Untersuchung der Ähnlichkeit linearer Modelle in auf R_B normierten Koordinaten konnten wir feststellen, daß einerseits $R_B/R_i \ll 1$, andererseits aber auch $r/R_i \ll 1$ eine notwendige Bedingung für die Ähnlichkeit ist. Während in der Koma $r/R_i \ll 1$ oft sogar für nichtlineare Kometen eine sehr gute Näherung darstellt, gilt das im Schweif nicht. Der Schweif nichtlinearer Kometen ist über mehrere 10^6 km ausgedehnt, wohingegen sich die Produktion kometarer Ionen bei einem antisolaren Abstand von 10^6 km im wesentlichen erschöpft hat.

Bei den linearen Kometen mit Schweifen von nur einigen 10^5 bis 10^6 km Länge ist die Ionenproduktion wesentlich größer, was dazu führt, daß Dichte- und Druckgradient im Schweif (relativ) geringer sind als bei den nichtlinearen Kometen, was schon aus den hydrodynamischen Modellen von Schmidt und Wegmann (1982) hervorgeht. Die Gradienten des Gesamtdruckes sind in dem Bild 6.15 als Funktion von R_B dargestellt, im Bild 6.16 finden wir die Massenproduktionsrate $\dot{\rho}_c$ kometarer Ionen. An dem gleichartigen Verlauf von Druck und Massenproduktion in Abhängigkeit von der Gasproduktionsrate G erkennt man, daß die Produktion kometarer Ionen den Druck im Schweif bestimmt. Da der Druck-

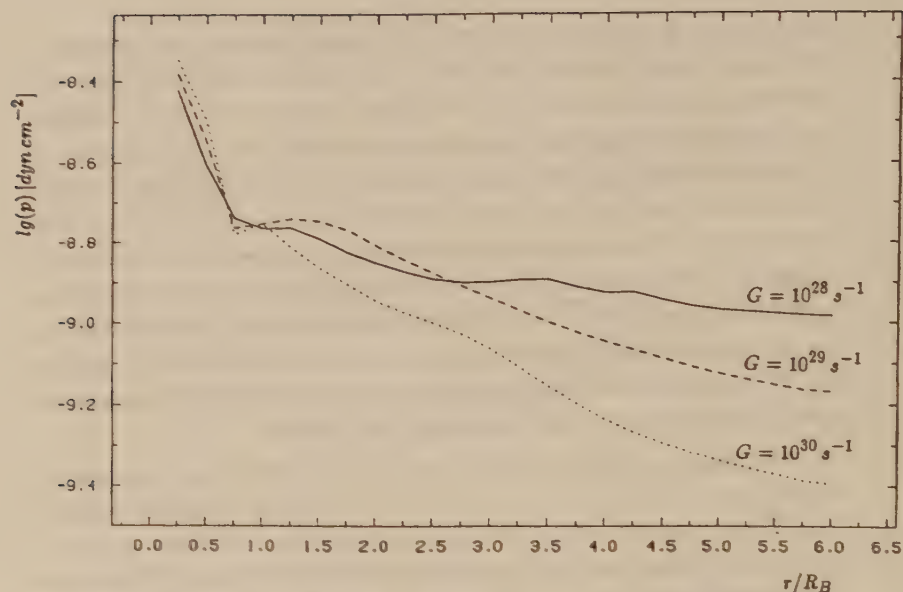


Abb. 6.15: Gesamtdruck im Schweif als Funktion des antisolaren Abstandes vom Kern des Kometen in Einheiten des Bugstoßwellenabstandes R_B für die drei stationären Modelle mit $G = 10^{28} s^{-1}$, $G = 10^{29} s^{-1}$ und $G = 10^{30} s^{-1}$.

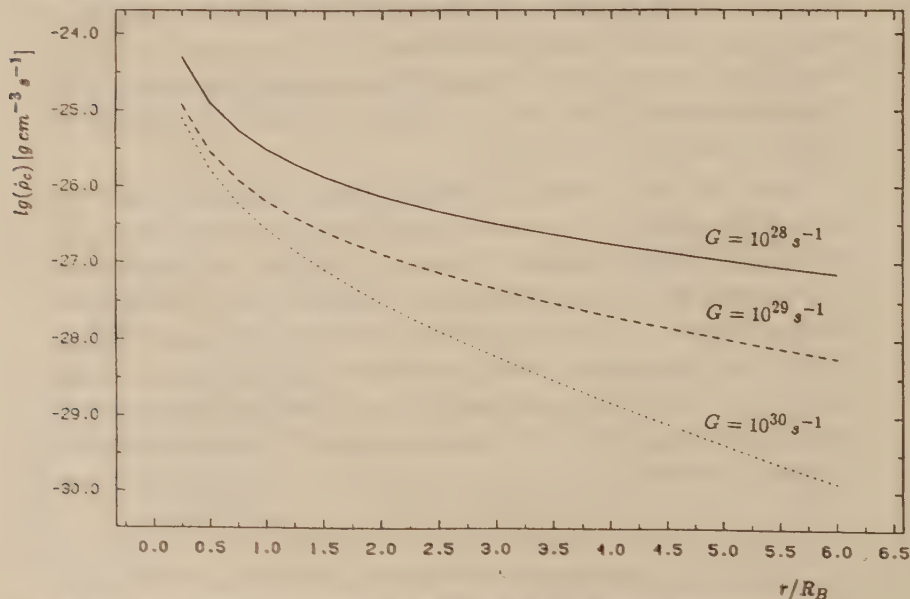


Abb. 6.16: Massenproduktionsterm $\dot{\rho}_c$ nach Gl.(2.9) für die drei Produktionsraten $G = 10^{28} s^{-1}$, $G = 10^{29} s^{-1}$ und $G = 10^{30} s^{-1}$ in Abhängigkeit vom antisolaren

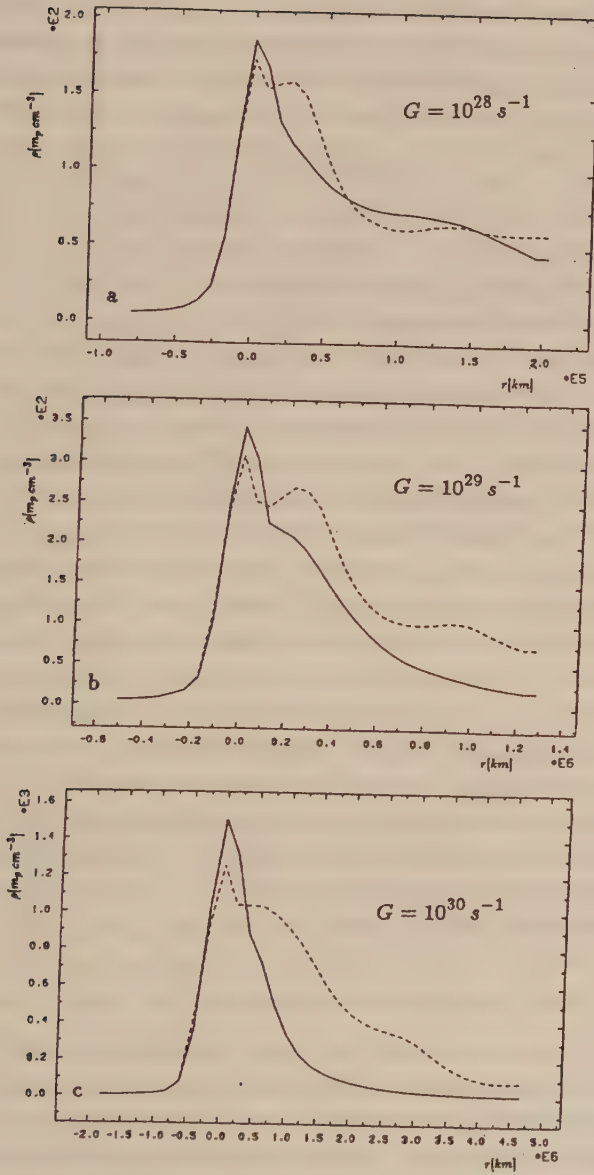


Abb. 6.17: Die Massendichte auf der Linie Komet-Sonne in $m_p \text{ cm}^{-3}$ für die Modelle mit $G = 10^{28} \text{ s}^{-1}$ (a), $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ (b) und $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$ (c). Durchgezogen ist das anfänglich stationäre Modell, gestrichelt das Modell im Dichteminimum in der Koma nach Bildung der Kondensation.

gradient auf der anderen Seite die Zerstörung der Schweif-Kondensation in axialer Richtung verursacht, ist die Ionisationslängenskala auch die entscheidende Länge für das Überleben von Strukturen im Schweif: Ist deren Länge klein gegenüber R_i , so kann die Struktur überleben, ist sie größer, so wird die Struktur im Schweif in axialer Richtung auseinandergerissen. Bei $G = 10^{28} \text{ s}^{-1}$ entspricht die Ionisationslänge etwa $30 R_B$, bei $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ $4 R_B$, und bei $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$ $0.8 R_B$. Betrachten wir uns die Längenskalen der Schweif-Kondensation in den Isophotenkarten von Bild 6.8 und Bild 6.13, so sehen wir, daß die (in der Rechnung berücksichtigte) Schweifausdehnungen für die drei Gasproduktionsraten $2 \cdot 10^5$, $1.4 \cdot 10^6$ und $5 \cdot 10^6 \text{ km}$ ist. Entsprechend kleiner ist die Ausdehnung der gebildeten Schweif-Kondensationen, nämlich etwa ein sechstel dieser Werte bei $G = 10^{28}$ und $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$. Sie haben daher ungefähr die Größe des Bugstoßwellenabstands R_B . Der Vergleich mit der Ionisationslänge $R_i = 10^6 \text{ km}$ offenbart nun, daß nur bei den Modellen mit $G = 10^{28}$ und $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ eine Schweif-Kondensation durch den Schweif transportiert werden kann, wohingegen sie bei 10^{30} s^{-1} das Plasma durch den größeren Druckgradienten über den Schweif verteilt wird, was nochmals in dem Bild 6.17 demonstriert ist. Wir finden dort die Dichte ρ auf der Achse Sonne-Komet an zwei Zeitpunkten, nämlich zum einen im anfänglichen stationären Modell ($t = 0$, durchgezogen), zum anderen am Zeitpunkt des Dichteminimums im Bild 6.13, d.h. genau dann, wenn die Schweif-Kondensation beginnt den Schweif zu durchwandern (gestrichelt). Bei $G = 10^{28} \text{ s}^{-1}$ ist die Expansion in antisolarer Richtung noch nicht weit fortgeschritten, die Schweif-Kondensation ist sehr deutlich ausgeprägt. Im fernerem Schweif ($> 5 \cdot 10^4 \text{ km}$) wird sogar ein Minimum in der Dichte erreicht, das mit dem erhöhten Magnetfeld der magnetischen Diskontinuität im IMF korreliert ist, aber die Dynamik nicht wesentlich beeinflusst. Bei $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$ ist die "Zerstörung" oder axiale Expansion schon weiter fortgeschritten, eine Schweif-Kondensation ist aber noch deutlich zu erkennen. Bei $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$ schließlich verteilt sich die Materie mehr oder weniger über den gesamten Schweif und ist als Schweifkondensation nicht mehr zu erkennen.

Fassen wir kurz zusammen: Als Folge von 90° -Diskontinuitäten treten immer Verdichtungen der Koma auf, die durch die aufgrund der "Erschöpfung" des Neutralgases unterschiedlichen Druckgradienten von linearen und nichtlinearen Kometen nur bei linearen Kometen als Schweif-Kondensationen durch den Schweif

transportiert werden können. Bei nichtlinearen Kometen verteilt sich das komprimierte Plasma über den gesamten Schweif und ist daher nicht mehr wahrzunehmen. Schweif-Kondensationen durch den vorgeschlagenen Mechanismus sind somit auf lineare (oder schwach nichtlineare) Kometen beschränkt.

6.3. PERIODISCHE DREHUNG DES MAGNETFELDES

Beim Vergleich der Simulation des Kometen Halley mit den Messungen der Giotto-Mission hatten wir erkannt, daß sowohl bei dem Modell von Schmidt und Wegmann (Schmidt et al., 1986; Wegmann et al., 1987), als auch bei unserer Rechnung die Kompression des Magnetfeldes im Stagnationsbereich im Vergleich zu den Messungen zu gering ist. Während das Maximalfeld der Rechnungen bei ungefähr 30 nT liegt, werden von Giotto 55 nT gemessen. Wir wollen hier den Vorschlag von Wegmann (1987, private Mitteilung) prüfen, der eine stärkere Feldkompression bei einer periodischen Drehung des Magnetfeldes im Sonnenwind vorhersagt; durch die Drehung wird der Abfluß des magnetischen Feldes um den Kometen herum verringert, und das Magnetfeld stärker komprimiert.

In sechs Simulationen haben wir mit verschiedenen Perioden für die Felddrehung eine Abhängigkeit der maximalen Feldstärke vor dem Kometenkern von der Periode der Drehung untersucht. Ausgangspunkt war ein stationäres Modell mit den Parametern für den Kometen Halley (siehe Abschnitt 5.2), wobei ein idealisiertes Modell mit konstanter Photoionisationsrate $\sigma = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ und $m_c = 20 m_p$ verwendet wurde. Da uns bei dieser Simulation daran gelegen ist, möglichst nahe an den Kern heranzukommen, wurde ein äquidistantes Gitter mit 17 Stützstellen in jeder Raumrichtung gewählt, ein Abstand von 10^6 km in jeder Richtung vom Kern wurde berücksichtigt. Der dem Kern nächste Gitterpunkt ist dann ungefähr in einer Entfernung von 10^4 km . Am inneren Rand in solarer Richtung geben wir als zeitabhängige Randbedingung die periodische Drehung des Feldes in der yz -Ebene vor:

$$\vec{B}_0 = B_0 (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y) . \quad (6.1)$$

Mit der Frequenz der Drehung ν ist $\omega = 2\pi\nu$.

Die Rechnung wurde mit $\nu = 0.25, 0.5, 0.67, 1.0, 1.25$, und 1.5 h^{-1} durchgeführt, das Maximalfeld 10^4 km vor dem Kern ist in dem Bild 6.18 als Funktion der Zeit dargestellt. Der Zeitnullpunkt wurde so gewählt, daß sich für $t = 0$ das

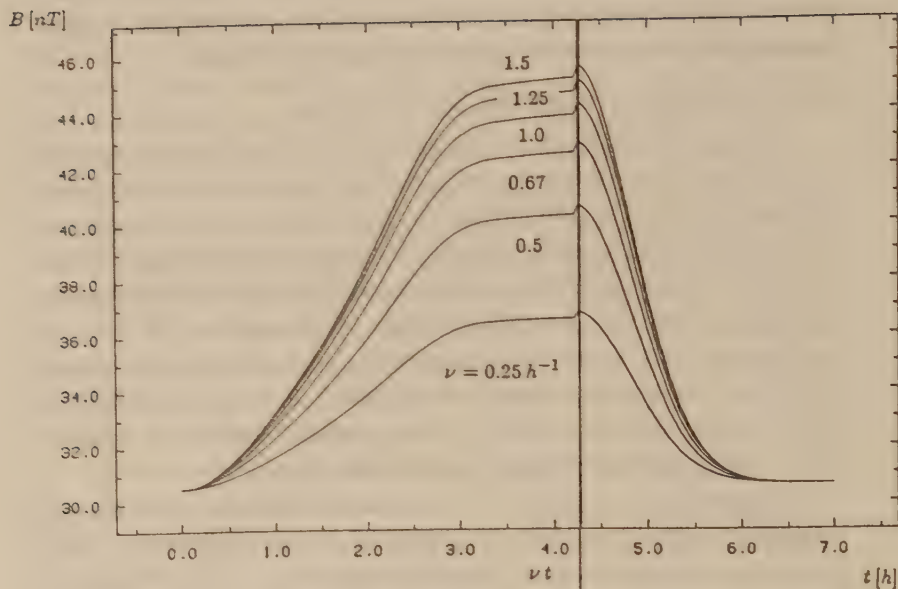


Abb. 6.18: Magnetisches Feld B eines Modells mit periodischer Drehung des IMF mit Periode ν als Funktion der Zeit an einem "Testpunkt" 10^4 km vor dem Kometenkern. Die Zeitachse ist bei 4.2 in zwei Bereiche geteilt, links davon ist die Einheit νt , rechts davon t in Stunden.

Magnetfeld an unserem "Meßpunkt" 10^4 km vor dem Kometenkern relativ um 10^{-3} gegenüber dem anfänglichen stationären Modell ändert. Der Nullpunkt ist daher für die Modelle individuell verschieden und entspricht der Laufzeit vom inneren Rand bis zu dem "Meßpunkt". Diese Zeit ist in allen betrachteten Modellen ungefähr 2.8 h, von der Bugstoßwelle bis zum Meßpunkt benötigt das Plasma etwa 2.3 h. Für $0 \leq t \leq 4.2$ ist die Einheit der Zeitachse die Zahl der Umdrehungen des IMF, d.h. νt . In diesen Einheiten steigt das Feld nämlich für alle Perioden in ähnlicher Weise an und erreicht nach ungefähr 3 Umdrehungen einen stationären Wert, der umso größer ist, je höher die Periode der Felddrehung ist. Nach etwa

4.2 Umdrehungen, durch einen senkrechten Strich in dem Bild markiert, wird die Zeitskala von den relativen Einheiten νt für jedes Modell, auf absolute Einheiten t in Stunden geändert. Zwischen dem Zustand links und rechts des Strichs werden dann noch vier Umdrehungen des Feldes mitgerechnet und etwa 2.8 Stunden vor Beendigung der vier Umdrehungen, entsprechend der Laufzeit des Feldes vom inneren Rand zu unserem "Meßpunkt", wird die Felddrehung angehalten und bei den ersten Anzeichen der Abnahme des Feldes, wiederum bei einer relativen Änderung von 10^{-3} , die Darstellung in dem Diagramm fortgesetzt. Das Feld fällt dann natürlich in einer von der Periode der Drehung unabhängigen Zeitskala auf den Wert des ursprünglichen stationären Modell ab und erreicht diesen nach etwa zwei Stunden. Diese Zeit ist in der Größenordnung der hydrodynamischen Zeitskala des inneren Bereiches der Koma, in der das Magnetfeld effektiv komprimiert wird, wenn wir eine Abmessung von $2 \cdot 10^4 \text{ km}$ und Geschwindigkeiten von einigen km s^{-1} annehmen. Dies ist auch die Zeitskala für den Transport des Feldes um den Kern und damit für die Relaxation des magnetischen Flusses. Den Abfall des Feldes haben wir berechnet, um uns davon zu überzeugen, daß unser numerisches Verfahren auch richtig arbeitet und der ursprüngliche stationäre Zustand wieder erreicht wird. Wir werden ihn in dieser Weise wohl kaum in Kometen finden. Wir sehen also, daß eine periodische Drehung des Feldes eine merklich effektivere Kompression des Magnetfeldes im Stagnationsbereich verursacht. Erwartungsgemäß wird der Abfluß des magnetischen Feldes um den Kometen umso stärker behindert, je schneller das Feld rotiert.

Wenn wir eine mittlere Standardabweichung von 3.4% zulassen, können wir die numerisch gefundene Abhängigkeit der Felderhöhung $\Delta B = B - B_0$ des Feldes B aus dem zeitabhängigen Modell gegenüber B_0 der ursprünglichen stationären Rechnung durch eine Exponentialfunktion nähern. Mit der Frequenz ν der Felddrehung gilt:

$$\begin{aligned}\Delta B &\simeq \Delta B_0 \left(1 - e^{-\frac{\nu}{\nu_0}} \right), \\ \Delta B_0 &= 16.15 \text{ nT}, \\ \nu_0 &= 0.5 \text{ h}^{-1}.\end{aligned}\tag{6.2}$$

ν_0^{-1} ist wiederum von der Größenordnung der hydrodynamischen Zeitskala des inneren Bereiches, in dem die Kompression des Magnetfeldes wichtig wird. Für

$\nu \rightarrow \infty$, was $\nu \gg \nu_0$ oder (*hydrodynamische Zeitskala der inneren Koma*) $\gg$ (*Umdrehungszeit*) bedeutet, ist $\Delta B \approx 16.15 nT$. Damit wird das Feld maximal um gut einen Faktor 1.5 gegenüber dem ursprünglichen stationären Modell erhöht. Dieser maximale Kompressionsfaktor paßt ausgezeichnet zu den numerischen Resultaten von Schmidt und Wegmann (1982). Dort wurde neben einem dreidimensionalen auch ein zweidimensionales axialsymmetrisches Modell mit azimuthaler Symmetrie berechnet, was impliziert, daß sich das IMF so schnell ändert, daß die Strömung nicht auf die azimuthalen Kräfte reagieren kann. Auch hier wird der magnetische Fluß um den Kometen herum maximal behindert. Das Maximalfeld im Stagnationsbereich von deren axialsymmetrischem Modell beträgt $67 nT$, im dreidimensionalen Modell $43 nT$, was ein Faktor 1.56 ist und damit ausgezeichnet zu unserem Faktor 1.53 paßt.

Wie ändert sich die Simulation des Rendezvous von Giotto mit Halley? Die in unserer Simulation erreichten maximalen $45 nT$ entlang der Ausflugtrajektorie würden bei der für Giotto in etwa relevanten Periode von $2 h$, auf ungefähr $58 nT$ erhöht. Das Feld ist dann in guter Übereinstimmung mit den Meßergebnissen. Der von Wegmann vorgeschlagene Weg einer periodischen Drehung führt daher zu einer wesentlichen Verbesserung der Simulation der Halley-Messungen.

6.4. PLÖTZLICHE ÄNDERUNG DER KOMETAREN GASPRODUKTION

Die Simulation einer Änderung der kometaren Gasproduktion G ist wesentlich aufwendiger als die einer tangentialen Magnetfelddiskontinuität, da sich die Produktionsrate nicht instantan in der gesamten Koma ändern kann; die "Diskontinuität" in dem Neutralgas läuft vielmehr mit der Geschwindigkeit v_c durch die Atmosphäre des Kometen. Aus diesem Grunde dauert es fast drei Stunden, bis die Teilchen mit der neuen Produktionsrate eine relativ geringe Entfernung von $10^4 km$ vom Kern erreichen. Die Änderungen in der Koma ereignen sich daher in Zeitskalen, die groß gegen die hydrodynamische Zeitskala sind, sieht man einmal von dem innersten Bereich der Stagnation ab. Zur Konstruktion eines realistischen numerischen Modells benötigen wir daher eine extrem gute Auflösung des Stagnationsbereichs und extrem lange Entwicklungszeiten, d.h. extrem viele Zeitschritte. Durch die unterschiedlichen Zeitskalen erwartet man zudem einen eher kontinuierlichen Übergang als eine instantane Änderung der Plasmaeigenschaften

(Jockers, 1985).

Die folgende Simulation, bei der wir zum Zeitpunkt $t = 0$ die Produktionsrate des anfänglichen stationären Modells aus dem letzten Abschnitt ($G = 6.9 \cdot 10^{29} \text{ s}^{-1}$) auf $G = 3.45 \cdot 10^{29} \text{ s}^{-1}$ in der gesamten Atmosphäre des Kometen ändern, ist daher mehr von akademischem Interesse, weshalb wir das Ergebnis auch nur kurz angeben wollen.

Wir verwenden bei der Simulation dasselbe Gitter wie bei den Modellen mit magnetischen Diskontinuitäten; in diesem Falle beschränken wir uns auf eine Auflösung mit 17^3 Gitterpunkten. Für den Sonnenwind setzen wir die Werte des Giotto-Rendezvous am 14.3.1986 ein, d.h. $\rho_{\odot} = 7 \text{ m}_p \text{ cm}^{-3}$ und $v_{\odot} = 380 \text{ km s}^{-1}$. Nach der plötzlichen Verminderung der Gasproduktion ist die Masse der Atmosphäre im Vergleich zum stationären Zustand zu hoch, insbesondere im inneren Bereich der Koma, der von den kometaren Ionen dominiert wird. Das neue Modell hat daher eine verglichen mit dem entsprechenden stationären Zustand zu dichte Koma, ganz ähnlich, wie es bei der 90° -Diskontinuität im Magnetfeld der Fall war. Genauso wie dort fließt das überschüssige Plasma in den Schweif ab und bildet eine Schweif-Kondensation.

Die Isophoten mit Aufsicht auf die IMF-Ebene werden für einige Zeitschritte in dem Bild 6.19 gezeigt, der Unterschied zwischen maximaler Helligkeit von erstem und letztem Bild beträgt ungefähr einen Faktor 2. Das Verhalten im Schweif ist nur unwesentlich verschieden von dem der 90° -Diskontinuität. Die Ausdehnung der Schweif-Kondensation von anfänglich $2 \cdot 10^5 \text{ km}$ ist gegenüber der Ionisationszeitskala (10^6 km) klein genug und kann die Schweif-Kondensation nicht zerstören.

In einem rein hydrodynamischen Modell ohne Magnetfeld ($B_{\odot} = 0$) finden wir keine Schweif-Kondensation. Auch bei der plötzlichen Änderung der Gasproduktion ist die Schweif-Kondensation ein rein magnetischer Effekt. Dies mag zunächst verwundern, doch erkennen wir bei einem genaueren Studium des Modells, daß der erhöhte thermische Druck in der Schweif-Kondensation, der zwangsläufig zur thermischen Expansion und damit zur Zerstörung führt, in dem MHD-Modell durch einen erhöhten magnetischen Druck von außen kompensiert wird. Bei der Verkleinerung der Koma wird auch das überschüssige Magnetfeld in den Schweif transportiert, wodurch wir schließlich wieder einen vom Azimut des Aufpunkts

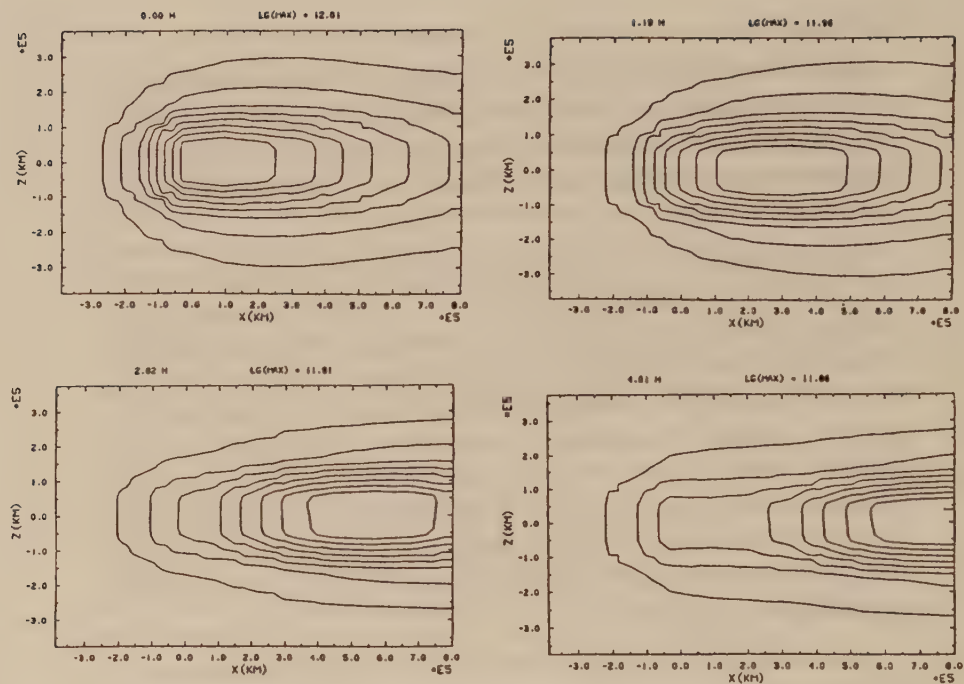


Abb. 6.19: Isophoten mit Aufsicht auf die IMF-Ebene für die Simulation, bei der zur Zeit $t = 0$ die Gasproduktion von $G = 6.9 \cdot 10^{29} \text{ s}^{-1}$ auf $G = 3.45 \cdot 10^{29} \text{ s}^{-1}$ in der gesamten Atmosphäre des Kometen vermindert wird. Angegeben ist das Maximum logarithmisch in cm^{-2} ; die äußerste Isophote hat 10% dieser Intensität. Die Modellparameter sind die des Rendezvous von Giotto mit Halley.

unabhängigen Druck erhalten. Im rein hydrodynamischen Modell existiert ein solcher Mechanismus zur Stabilisierung nicht und die Schweif-Kondensation wird durch die thermische Expansion zerstört.

Es sei erwähnt, daß auch bei einer plötzlichen Änderung der Produktionsrate nur an den innersten Punkten des Gitters in der Koma (in etwa 10^4 km Abstand vom Kern) eine Schweif-Kondensation ausgebildet wird. Aber selbst hier haben wir eine Laufzeit der "Diskontinuität" im Neutralgas von über drei Stunden vernachlässigt, was schon mehr als die hydrodynamische Zeitskala dieses Bereichs ist.

Auch dieses Modell ist daher nur von akademischem Interesse.

Wir haben dieses nur wenig realistische Modell gezeigt, um ein Prinzip zur Bildung von Schweif-Kondensationen im Kometenschweif herauszuarbeiten. Sowohl in dem akademischen, als auch in dem Modell mit der 90° -Diskontinuität war der Bildung der Schweif-Kondensation eine Verdichtung der Koma vorausgegangen. Die Unabhängigkeit des totalen Drucks im Schweif vom Azimut des Aufpunkts in den MHD-Modellen läßt die Verdichtung dann ungestört durch den Schweif fließen und verhindert deren thermische Expansion. Zur Erklärung der Schweif-Kondensationen benötigen wir also einerseits einen Mechanismus, der einen Teil der inneren Koma komprimiert, andererseits das Magnetfeld, das einen vom Azimut des Aufpunkts unabhängigen Gesamtdruck im Schweif erzeugt. Außerdem muß die Ionisationslänge im Schweif viel größer als die Abmessung der Schweif-Kondensation sein (Linearität).

7. ZUSAMMENFASSUNG UND DISKUSSION

Im Verlauf der Arbeit haben wir ein implizites, zeitabhängiges dreidimensionales Verfahren zur Lösung der magnetohydrodynamischen Gleichungen entwickelt und auf kometare Plasmen angewendet. Wir wollen jetzt die wesentlichen Ergebnisse im Zusammenhang diskutieren, sowie uns überlegen, welche der beobachteten Kometen als Kandidaten für Schweif-Kondensationen als Folge von Drehungen des IMF um weniger als 180° in Frage kommen.

Wenden wir uns zunächst den numerischen Fragen zu. Das IFMAG-Differenzschema hat gegenüber anderen impliziten mehrdimensionalen Verfahren den entscheidenden Vorteil, daß es nicht iterativ ist und überdies die Zahl der Rechenoperationen nur linear von der Gesamtzahl der Ortsstützpunkte abhängt, ganz so, wie das auch bei expliziten Verfahren der Fall ist. Selbstverständlich benötigt die Berechnung jedes einzelnen Zeitschritts mehr Rechenoperationen wie ein explizites Schema, so daß der absolute Bedarf an Rechenzeit für den einzelnen Zeitschritt größer ist; dafür dürfen wir aber auch größere Zeitschritte wählen.

Problematisch kann bei einem impliziten Verfahren die Berücksichtigung von Quelltermen in den Erhaltungsgleichungen sein. In unseren Simulationen berücksichtigen wir entweder geschlossene zeitabhängige Lösungen (Test mit Lows Modellen) oder konstante Quellterme (ideale Kometenmodelle). Bei den Simulationen von Halley und Giacobini-Zinner verwenden wir zwar Quellen, die von dem aktuellen Zustand des Plasmas implizit abhängen, sie können aber explizit vom alten Zeitschritt übernommen werden, da der neue Zustand des Plasmas nicht allzusehr von den Quelltermen abhängt. Bei der Behandlung von Quellen stoßen wir dann auch schon an die Grenzen unseres Verfahrens. Zwar läßt sich die implizite Abhängigkeit der Quellterme problemlos durch Taylorentwicklung in das Schema aufnehmen; müssen wir aber, wie bei Problemen mit Gravitationskräften, noch zusätzlich eine Gleichung lösen, die nicht in Erhaltungsform ist, so ist das Verfahren ungeeignet. Es lassen sich dann nicht alle Gleichungen simultan integrieren, und das IFMAG-Schema muß mit dem Verfahren zur Lösung der zusätzlichen Gleichung iterativ gekoppelt werden. Für Probleme dieser Art ist von vorneherein ein iteratives Schema zu bevorzugen. Bei den Kometen sind wir in der glücklichen Lage, daß Gravitation vernachlässigbar ist. Zwar müssen wir bei der Elimination

der künstlichen magnetischen Monopole auch eine Poisson-Gleichung lösen, die Änderungen des Magnetfeldes bei jedem Zeitschritt sind aber so klein - i.A. unterhalb der Genauigkeit unseres Schemas -, daß nur die Langzeitentwicklung durch die magnetischen Monopole entscheidend gestört wird. Diese Änderungen können wir daher ohne weiteres nicht-iterativ in unser Differenzenschema aufnehmen.

Die Elimination künstlicher magnetischer Monopole ist eine absolute Notwendigkeit, falls die relativen Divergenzen in Gl.(3.33) $\gtrsim 1\%$ sind. Dann nämlich haben sie einen merklichen Einfluß auf die übrigen hydrodynamischen Variablen, und die Lösung kann unphysikalisch werden. Bei reinen Überschallströmungen können wir die unerwünschten Monopole schon durch Addition eines Transportterms zur magnetischen Feldgleichung genügend klein halten. Diesen Transportterm können wir explizit in das Schema aufnehmen, da er proportional zu der kleinen Größe $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ ist und daher die Stabilität nicht negativ beeinträchtigt. Bei Unterschallströmungen ist der Transportterm nicht effektiv genug, und wir müssen ein anderes Verfahren anwenden. Der im Abschnitt 3.3 entwickelte Algorithmus leistete uns dabei gute Dienste.

Die künstlichen magnetischen Monopole scheinen die MHD-Simulationen für Kometen von Schmidt und Wegmann nicht wesentlich beeinträchtigt zu haben, da wir bei den stationären Modellen generell eine gute Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Autoren feststellen; Differenzen haben ihre Ursache in der Auflösung des Gitters oder verschiedenen Modellen für die Entwicklung des Neutralgases, was zu unterschiedlichen Elektronentemperaturen bei Giacobini-Zinner im Vergleich zu Wegmann (1987) führt. Aus diesen Unterschieden können wir lernen, wie wichtig ein möglichst realistisches Modell für das Neutralgas ist. Durch einen Vergleich von zwei Modellen mit und ohne detaillierte Wechselwirkung von Plasma und Neutralgas finden wir die wesentlichen Effekte der Wechselwirkung auf den innersten Bereich der Koma beschränkt (ungefähr 10% des Abstandes der Bugstoßwelle vom Kern). Die Quellen führen hier zu geringerer Dichte und thermischem Druck, aber auch zur effektiveren Kompression des Magnetfeldes, so daß der Gesamtdruck praktisch unverändert bleibt.

Die von den Sonden ICE und Giotto übermittelten Daten werden von den Modellen befriedigend, die Elektronentemperaturen wegen des verglichen mit Schmidt

und Wegmann unrealistischeren Neutralgasmodells nur ungenügend reproduziert. Auf die anderen Plasmagrößen hat die genaue Form der Wechselwirkung von Plasma und Neutralgas nur wenig Einfluß, da die Messungen von beiden Modellen in gleicher Weise wiedergegeben werden. Die "Kometopause" können wir im Rahmen des MHD Modells als Diskontinuität interpretieren, in der sich der Winkel zwischen den Geschwindigkeits- und Magnetfeldvektoren des solaren Windes ändert. Die Frage, ob man dadurch auch die Zunahme der Dichte der Elektronen oberhalb 10 eV , und die Abnahme der Geschwindigkeit an der Kometopause erklären kann, müssen wir offenlassen. Beim Magnetfeld stellt sich sowohl bei Giacobini-Zinner als auch bei Halley das Problem, daß die maximale Feldstärke bei der nächsten Annäherung der Sonden an den Kern in den Modellen zu gering ist. Bei Halley können die Unterschiede durch ein zeitabhängiges interplanetares Magnetfeld erklärt werden. Eine Drehung des Feldes mit einer Umdrehungszeit von zwei Stunden, die man unter Vernachlässigung von plötzlichen Umkehrungen des Feldes aus den Meßdaten ermitteln kann, behindert den magnetischen Fluß um den Kometen gerade stark genug, um die gemessenen Feldstärken zu reproduzieren. Für Giacobini-Zinner, bei dem ICE hinter dem Kern durch den Schweif flog, kommt eine solche Erklärung nicht in Betracht. Hier kann vermutlich die Geometrie der beiden Bereiche unterschiedlicher Polarität nicht genau genug simuliert werden. Alles in allem läßt sich aber die generelle Struktur der Kometen Halley und Giacobini-Zinner durch stationäre Modelle gut beschreiben. Bis zur Simulation der vielen zeitabhängigen, vermutlich durch magnetische Diskontinuitäten im Sonnenwind verursachten Strukturen, ist es jedoch noch ein weiter Weg, da die genaue Auflösung jeder dieser Diskontinuitäten z.Zt. noch außerhalb der Rechenmöglichkeiten liegt.

Prinzipielle Untersuchungen über die Wirkung von Störungen im Sonnenwind auf die Kometenatmosphäre lassen sich aber auch schon mit geringerem Aufwand bewerkstelligen. Dabei haben wir uns im wesentlichen mit tangentialen Diskontinuitäten des IMF beschäftigt. Bänder, wie sie Schmidt und Wegmann (1982) bei einer 90° -Drehung fordern, oder Schweifablösungen bei einer Umkehr des IMF nach Niedner und Brandt (1978) können wir nicht reproduzieren. Bei den Bändern ist es die Auflösung des Gitters, die eine realistische Simulation unmöglich macht. Die Erklärung von Diskonnexion durch magnetische Rekonnexion vor dem Ko-

metenkern scheint nicht so problemlos zu funktionieren, wie man es nach dem qualitativen Modell von Niedner und Brandt (1978) erwarten würde, da selbst die numerische Diffusion der Feldlinien nicht ausreicht. Im Gegensatz zu Ogino et al. (1986), die zweidimensionale MHD-Modelle unter Berücksichtigung einer vorgegebenen elektrischen Leitfähigkeit behandeln, ist die Simulation der magnetischen Rekonnexion mit unserem dreidimensionalen Modell nicht möglich. Für das numerische Modell ist es natürlich von Vorteil, daß wir keine magnetische Rekonnexion durch numerische Leitfähigkeit erhalten, da sie auch nicht bei den anderen Simulationen als unliebsame Begleiterscheinung auftritt.

Der wohl wichtigste zeitabhängige Effekt unserer Untersuchung ist die Bildung von Schweif-Kondensationen bei Drehungen des IMF um weniger als 180° . Dabei wirkt das magnetische Krümmungskraftfeld des ursprünglichen und des gedrehten IMF und komprimiert das Plasma in der Koma in zwei Richtungen. Dieser Bildungsprozess der Schweif-Kondensation ist im wesentlichen unabhängig von der Gasproduktionsrate des Kometen, wohingegen sich die verschiedenen Kometen in der Art des Transports der Schweif-Kondensation unterscheiden. Hierbei war die Unterscheidung von linearen und nichtlinearen Kometen nützlich. Bei den linearen Kometen ist der Abstand der Bugstoßwelle vom Kern klein gegen die Längenskala für Ionisation, bei den nichtlinearen ist das nicht der Fall. Aus diesem Grunde ist bei den nichtlinearen Kometen die Produktion kometarer Ionen im Schweif relativ geringer, so daß der Schweif aufgrund der geringeren Drücke dieser Ionen durch die magnetischen Krümmungskräfte stärker abplattet als bei linearen Kometen. Diese "Erschöpfung" des Neutralgases im Schweif ist auch der Grund für den unterschiedlichen Transport der Schweif-Kondensationen. Bei den linearen Kometen ($G \lesssim 10^{29} \text{ s}^{-1}$) sind die Abmessungen der Schweif-Kondensation erheblich kleiner als die Längenskalen für Ionisation des Neutralgases, die den Druckgradienten im Schweif bestimmen. Dadurch kann das komprimierte Plasma aus der Koma als Kondensation durch den Schweif transportiert werden. Bei den nichtlinearen Kometen mit $G \gtrsim 10^{29} \text{ s}^{-1}$ geraten die Abmessungen in die Größenordnung der Ionisationsskala, so daß sich das Plasma über einen so großen Bereich des Schweifs verteilt, daß es nicht mehr als Schweif-Kondensation bezeichnet werden kann. Der Transport der Schweif-Kondensation hängt also im wesentlichen vom Verhältnis der Abmessungen der in der Koma gebildeten Plasmaverdichtung zur Ionisati-

onslänge im Schweif ab. Diese Plasmaverdichtung ist in der Koma immer kleiner als der Bugstoßwellenabstand R_B ; den Isophotenkarten im letzten Kapitel können wir entnehmen, daß sie im Schweif eine typische Länge von der Ordnung R_B hat. Unsere Bedingung für den Transport der Kondensation durch den Schweif ist daher $R_B/R_i \ll 1$, d.h. Linearität. Zusätzlich benötigen wir natürlich das Magnetfeld, das uns im Schweif einen vom Azimut des Aufpunkts unabhängigen Gesamtdruck erzeugt und damit die Zerstörung der Kondensation durch thermische Expansion verhindert.

Die Grenze zwischen linearen und nichtlinearen Kometen bei einer Gasproduktionsrate $G \simeq 10^{29} \text{ s}^{-1}$ basiert auf Parametern für den Sonnenwind und das solare Strahlungsfeld, die etwa in einem Abstand von 1 AE von der Sonne gelten. Dabei haben wir eine Ionisationsrate $\sigma = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ und Sonnenwinddichte $\rho_\odot = 5 m_p \text{ cm}^{-3}$ angenommen. Aufgrund der geometrischen Verdünnung der solaren Strahlung und des Sonnenwindes hängen beide Parameter wie R^{-2} vom Abstand R von der Sonne ab. Wegen der Abhängigkeit der Intensität des solaren Strahlungsfeldes vom Sonnenabstand können wir auch die Produktionsrate G proportional zu R^{-2} annehmen, was Messungen im wesentlichen bestätigen (Fernández und Jockers, 1983). Die - relativ schwache - Abhängigkeit der Neutralgasgeschwindigkeit von R ($\approx R^{-0.5}$ nach Delsemme (1982)) wollen wir im folgenden vernachlässigen.

Um zu demonstrieren, wie sich die Abmessungen und Eigenschaften des Kometen als Funktion des heliozentrischen Abstandes ändern, ist in dem Bild 7.1 der Bugstoßwellenabstand auf der Linie Komet-Sonne als Funktion des Abstandes von der Sonne R dargestellt. Die Berechnung erfolgt nach der Gl.(2.4) mit gegebenem $\sigma_o = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $\rho_{\odot,o} = 5 m_p \text{ cm}^{-3}$, $v_\odot = 400 \text{ km s}^{-1}$, $m_c = 20 m_p$, $v_c = 1 \text{ km s}^{-1}$ und $G_o = G(R_o)$ bei $R_o = 1 \text{ AE}$:

$$\int_{R_i}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi^2} d\xi = \frac{4\pi v_c^2 \rho_{\odot,o} v_\odot}{G_o \sigma_o^2 m_c (\gamma^2 - 1)} R^4. \quad (7.1)$$

Das Ergebnis mit $\gamma = 2$ ist in dem Bild 7.1 gezeigt. Bei kleinen Abständen R von der Sonne wird der Bugstoßwellenabstand hauptsächlich von der mit dem Abstand wie R^2 zunehmenden Ionisationslängenskala bestimmt. R_B ist für alle Produktionsraten vergleichbar mit der Ionisationslänge, und die Kometen sind immer nichtlinear. Bei großen Abständen von der Sonne wird wegen $R_i \approx R^2$ die

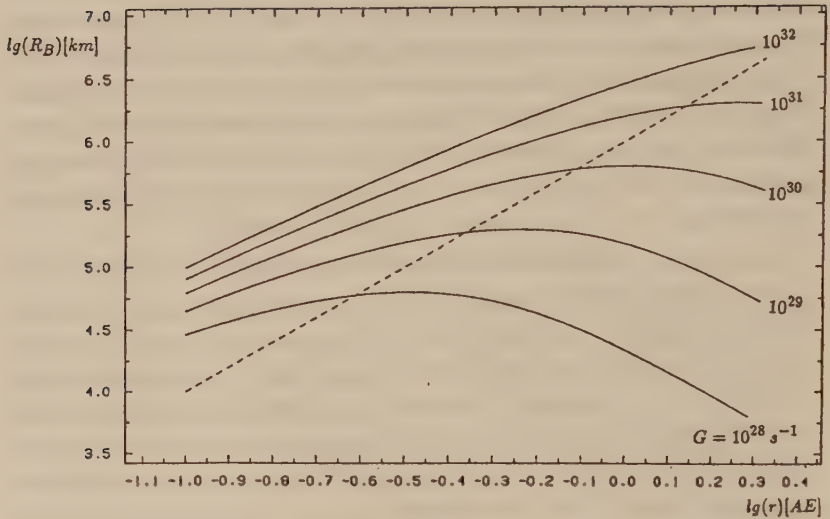


Abb. 7.1: Darstellung des Abstandes R_B der Bugstoßwelle vom Kometenkern als Funktion des heliozentrischen Abstandes R des Kometen für verschiedene Gasproduktionsraten G . Gestrichelt ist die Längenskala für Ionisation $R_i = v_c / \sigma \approx R^2$.

Ionisationsskala größer als der Bugstoßwellenabstand; die Kometen sind dann linear. Mit der Näherung Gl.(2.5) für R_B bei linearen Kometen sehen wir, daß für diese Objekte $R_B \approx R^{-2}$ ist. Am Schnittpunkt der Kurven mit der gestrichelten Linie, die die Ionisationslänge $R_i = R^2[AE]v_c/\sigma_0$ darstellt, ist $R_B/R_i = 1$, bei größeren R überwiegen dann die linearen Eigenschaften der Kometen und R_B nimmt dann wieder mit R ab. An den Schnittpunkten der Ionisationslängen mit dem Bugstoßwellenabstand in dem Bild 7.1 erkennen wir, daß der Übergang zwischen Linearität und Nichtlinearität mit zunehmendem Abstand von der Sonne bei größeren Produktionsraten stattfindet. Wir müssen daher durch die Abhängigkeit der Parameter vom Abstand des Kometen von der Sonne auch die Unterscheidung von linearen und nichtlinearen Kometen und damit die Möglichkeit zur Bildung von Schweif-Kondensationen als Funktion der heliozentrischen Distanz R modifi-

zieren. Die Grenze zwischen Nichtlinearität und Linearität wird jetzt nicht mehr durch die Gasproduktion, sondern durch das Verhältnis von Bugstoßwellenabstand zu Ionisationslänge $R_B/R_i = \zeta$ bestimmt, da per definitionem alle Objekte mit $R_B/R_i \ll 1$ linear sind und R_B überdies eine typische Länge der Schweif-Kondensation ist. Zur Bestimmung des kritischen Verhältnisses ζ zur Bildung einer Schweif-Kondensation betrachten wir die Modelle bei $R = 1 AE$. Bei dem Modell mit $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$, bei dem Schweif-Kondensationen gebildet werden, ist $R_B/R_i = 0.24$, mit $G = 10^{30} \text{ s}^{-1}$, bei dem keine Schweif-Kondensation gebildet wird, ist $R_B/R_i = 0.81$. Zwischen diesen beiden Werten (≈ 0.5) findet daher - vom Standpunkt der Bildung der Schweif-Kondensationen - der Übergang von Linearität zu Nichtlinearität statt.

Um zu untersuchen, welche Kometen bei gegebenem Abstand von der Sonne Schweif-Kondensationen mit dem von uns gefundenen Mechanismus bilden können, tragen wir in dem Bild 7.2 den Abstand R für festes $\zeta = 0.24, 0.5$ und 0.81 als Funktion von G auf. Unser besonderes Interesse gilt natürlich der Frage, welche beobachteten Kometen für die Bildung von Schweif-Kondensationen mit unserem Mechanismus in Frage kommen. Kennen wir nun von einem beobachteten Kometen den Abstand von der Sonne und die ungefähre Gasproduktionsrate, so können wir anhand seiner Position in dem Bild 7.2 feststellen, ob er Schweif-Kondensationen bilden kann.

In dem Bild 7.3 sind zwei Isophotenkarten der Kometen Whipple-Fedtko 1942 und Humason 1961 gezeigt, bei denen Schweif-Kondensationen deutlich zu erkennen sind. Aus der Größe der Kometen, die wir den Isophotenatlanten von Högnér und Richter (1969, 1979) entnehmen, können wir die Gasproduktion mit Gl.(2.4) abschätzen und die Kometen in das Bild 7.2 einzeichnen. Wir sehen, daß die Kometen genügend linear sind, um die beobachteten Schweifstrukturen durch Drehungen des IMF um weniger als 90° zu erklären. Magnetische Rekonnexion ist nicht erforderlich. Die beiden Kometen zeigen von den ausgewählten Objekten die größten Schweif-Kondensationen - und liegen in dem Bild 7.3 auch am weitesten im linearen Bereich. Vom Kometen Kohoutek gibt es eine Vielzahl von beobachteten Schweif-Kondensationen (Jockers, 1985), die den von uns theoretisch gefundenen ähneln. Sie sind aber alle wesentlich schwächer ausgeprägt als bei den Kometen Whipple-Fedtko 1942 und Humason 1961; Kohoutek 1975 liegt auch in

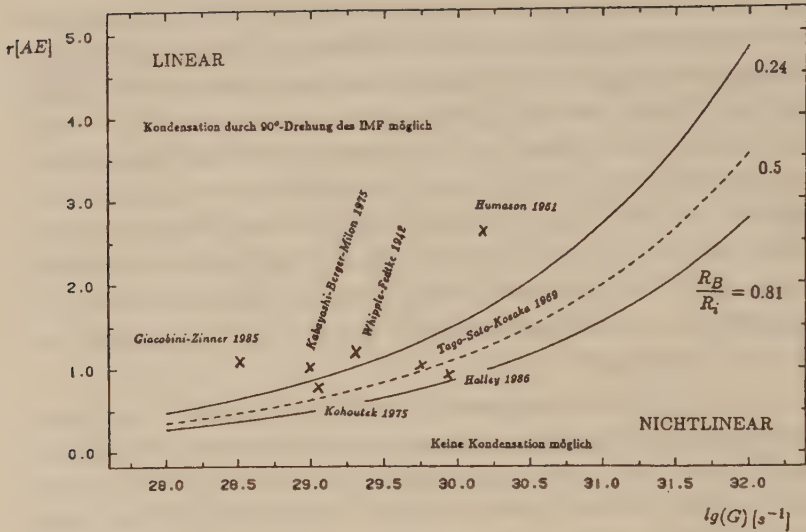


Abb. 7.2: Charakterisierung der Kometen in Abhängigkeit von heliozentrischem Abstand und Gasproduktionsrate mit Linien konstanten Verhältnisses von Bugstoßwellenabstand zu Ionisationslänge. Die Kometen links von den Kurven können Schweif-Kondensationen mit dem im vorigen Kapitel beschriebenen Mechanismus bilden, die rechts davon nicht. Zwischen den durchgezogenen Linien mit Mittelwert 0.5 auf der gestrichelten Linie ist der Übergangsbereich, der von den Simulationen nicht abgedeckt wird. Kreuze markieren eine Auswahl von Objekten, bei denen Schweif-Kondensationen beobachtet wurden.

unserem Bild 7.2 in dem Grenzbereich zwischen Linearität und Nichtlinearität. Die Gasproduktionsrate stammt aus Jockers (1985). Ein spektakuläres Schweif-Kondensationsphänomen wurde bei dem Kometen Kabayashi-Berger-Milon 1975 beobachtet (Bild 1.2). Aus den Abmessungen des Kometen schätzen wir eine Gasproduktionsrate von ungefähr 10^{29} s^{-1} ab. Auch dieser Komet fällt daher in den Bereich im Bild 7.2, in dem wir die Schweif-Kondensationen erklären können. Bei diesem Objekt beobachtet man auch ausgeprägte Schweifstrahlen und Bänder,

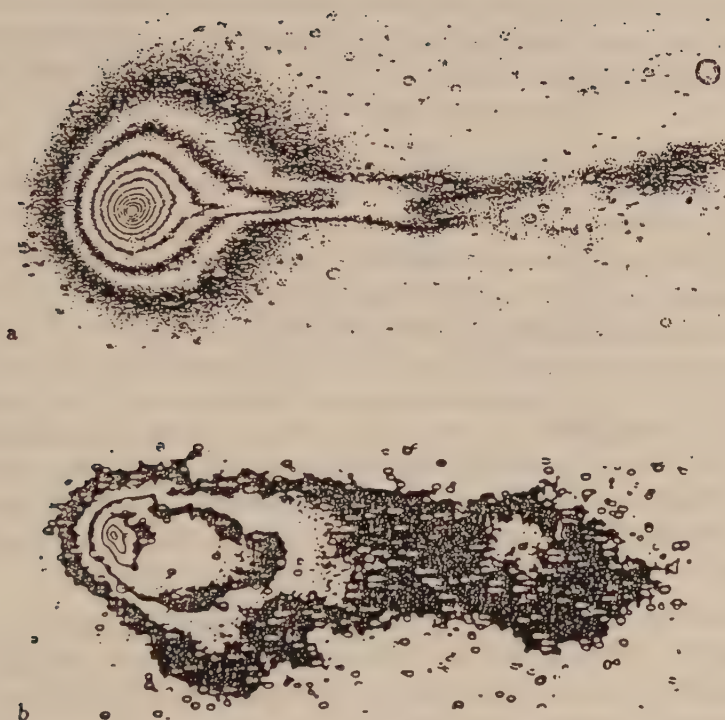


Abb. 7.3: Isophotenkarten der Kometen (a) Whipple-Fedtke 1942 (aus Högner und Richter, 1969), und (b) Humason 1961 (aus Högner und Richter, 1979), die Schweif-Kondensationen zeigen.

die vermutlich eine Folge der Drehungen des IMF um ungefähr 90° sind.

Bei dem Halleyschen Kometen 1986 wurde eine Vielzahl von Schweif-Kondensationen (Saito, Yumoto et al., 1987; Celnik und Schmidt-Kaler, 1987) und Schweifablösungen (Lundstedt und Magnusson, 1987; Brosius et al., 1987) gefunden. Hier sind wir in der glücklichen Lage, die von den verschiedenen Sonden gemessenen Strukturen im IMF durch Korotation mit Schweifphänomenen zu korrelieren. Besonders spektakulär ist dabei das Ereignis vom 9.3.1986, das von den

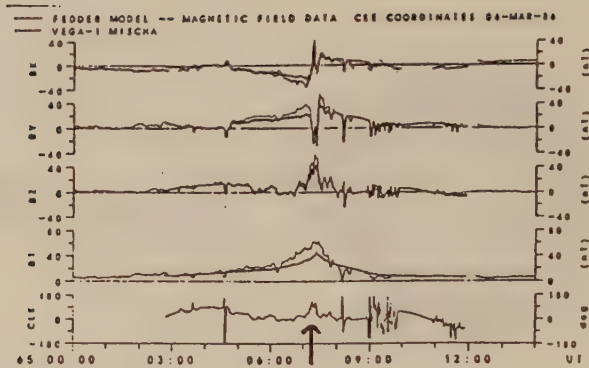


Abb. 7.4: Magnetfeldmessungen von Vega 1 und zugehörige tangentielle Drehwinkel des IMF. Die mit einem Pfeil gekennzeichnete Diskontinuität wird von Niedner und Schwingenschuh (1987) mit dem Diskonnektionseignis am 9.3.86, etwa 12 Stunden nach Beobachtung der Diskontinuität, verknüpft. Der Drehwinkel beträgt ungefähr 90° . Die Daten stammen aus Schwingenschuh et al. (1987).

Sonden Vega 1 und 2 gemessen wurde, im Falle von Vega 2 sogar direkt vor dem Kometen Halley, so daß Korotation nicht erforderlich ist. Diese magnetische Diskontinuität konnte mit einer Diskonnexion zwölf Stunden später verknüpft werden (Niedner und Schwingenschuh, 1986, 1987) und wird von den Autoren als Folge magnetischer Rekonnexion in der Koma dargestellt. Betrachten wir die Vega-1-Daten des Magnetfeldes im Bild 7.4 etwas genauer, so finden wir, daß es sich um eine tangentielle Diskontinuität mit einer Drehung von ziemlich genau 90° handelt, so daß magnetische Rekonnexion sehr unwahrscheinlich ist. Im Gegensatz dazu können wir dieses Ereignis zwanglos durch unser 90° -Modell beschreiben. Extrapolieren wir die Zeit- und Längenskalen unseres schwach nicht-linearen Modells mit $G = 10^{29} \text{ s}^{-1}$, so sind die Zeitskalen in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung. Obwohl Halley in dem Bild 7.2 schon ziemlich am Rand des für Schweif-Kondensationen möglichen Bereichs liegt, wollen wir dennoch die magnetische Diskontinuität für die beobachtete Schweifstruktur verantwortlich machen. Es ist im Gegenteil sogar sehr wahrscheinlich, daß die Längenskala für Photoionisation im Schweif größer ist als in der Koma, da das Neutralgas im Schweif durch

den solaren Strahlungsdruck länger beschleunigt werden kann. Bei größerer Ionsationslänge wird aber der Transport der Schweif-Kondensation begünstigt. Wir können daher erwarten, daß auch Kometen an der Grenze im Bild 7.2 Schweif-Kondensationen bilden können.

Bei Halley wurden noch weitere Diskonnexions-Ereignisse (20.3.1986, 11.4.1986) mit in-situ Messungen des ICE-Magnetometers verknüpft (Brosius et al., 1987). Diese Messungen geben aber einerseits durch die Größe des in Frage kommenden Zeitintervalls, das man durch Fehler bei der Korotation zulassen muß (11.4), anderseits durch Lücken in den Daten (20.3) keine eindeutige Auskunft darüber, ob das Ereignis von einer IMF-Umkehr, einer Drehung um kleinere Winkel, oder gar durch eine Erhöhung des dynamischen Druckes im Sonnenwind (11.4) verursacht wird. Unserem Modell widersprechen sie jedenfalls nicht.

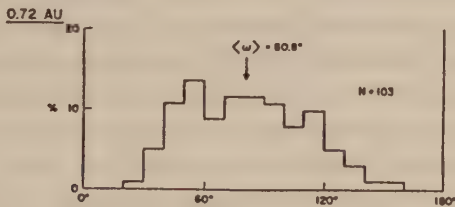


Abb. 7.5: Histogramm der Drehwinkel tangentialer Diskontinuitäten im IMF bei einer heliozentrischen Entfernung von 0.76 AE. Eingezeichnet ist der statistische Mittelwert $\langle \omega \rangle$. Aus Lepping und Behannon (1986).

Die Erklärung der Schweif-Kondensationen durch Drehungen des IMF um weniger als 180° hat den Vorteil, daß diese statistisch sehr viel häufiger sind als eine Feldumkehr. Lepping und Behannon (1986, Bild 7.5) konnten zeigen, daß bei tangentialen Diskontinuitäten so gut wie keine Drehungen des Feldes zwischen 150° und 180° existieren, der mittlere Drehwinkel ist $80^\circ \pm 30^\circ$. Tangentiale Diskontinuitäten definieren sie so, daß die Feldstärke der Normalkomponente des Magnetfeldes weniger als 30% der Gesamtfeldstärke beträgt. Nur bei Rotationsdiskontinuitäten mit einer wesentlichen Normalkomponente des Feldes ($> 30\%$ der Gesamtfeldstärke) gibt es einen geringen Anteil von 180° -Drehungen, der Mittel-

wert ist wiederum $90^\circ \pm 30^\circ$. Im übrigen wird durch die Tatsache, daß bei Halley auch tief in der Koma noch magnetische Bereiche mit unterschiedlicher Polarität koexistieren können (Raeder et al., 1987) magnetische Rekonnexion in der Koma unwahrscheinlich.

Problematisch bei zukünftigen Kometensimulationen wird nach wie vor das Gitter bleiben. Sind wir, wie bei der Reproduktion der in-situ-Messungen, daran interessiert, den Stagnationsbereich und die Magnetopause gut aufzulösen, dann müssen wir mit einem nicht-äquidistanten Gitter arbeiten. In unserer Simulation hatten wir sowohl mit einem kartesischen nicht-äquidistanten wie mit einem MULTIGRID gerechnet, die Grenzen der Auflösung lagen nach den numerischen Experimenten jedoch bei etwa 0.5% des Abstandes der Bugstoßwelle vom Kern. Dann werden bei Nicht-äquidistanz des Gitters die Volumzellen am Rande so ungünstig, daß das Verfahren zur Elimination der Monopole nicht konvergiert. Beim MULTIGRID sind es die Fehler bei der Interpolation in die verfeinerten Gitter, die die Auflösung auf ungefähr diesen Bereich beschränken. Um eine bessere Auflösung des Kernbereichs zu erlangen, d.h. Kontaktdiskontinuität und Magnetopause wirklich aufzulösen, müssen wir krummlinige Koordinaten, wie etwa die parabolischen aus dem Abschnitt 3.7 benutzen, die nicht die Eigenschaft der ungünstigen rechteckigen Volumzellen am Rand haben. Eine Verbesserung des Neutralgasmodells wäre sicherlich die Berücksichtigung einer nicht-sphärischen Verteilung des Neutralgases um den Kern des Kometen, wie sie etwa durch solaren Strahlungsdruck in größeren Abständen vom Kern ($\approx 10^5 \text{ km}$) verursacht wird. Bei der Simulation von Schweif-Kondensationen spielt die Längenskala für Ionisation im Schweif eine entscheidende Rolle. Auch hier wäre daher eine Verbesserung des Neutralgasmodells erstrebenswert.

Bei der Simulation der zeitabhängigen Effekte wäre es von Interesse, auch die plötzlichen Änderungen von Betrag und Richtung des Geschwindigkeitsfeldes des Sonnenwindes zu untersuchen. Ein Vergleich mit der Struktur der Kometenschweife, die in den isophotometrischen Atlanten von Högnér und Richter (1969, 1979) gezeigt werden, verschaffte sicherlich Klarheit über die Ursache der doch sehr unterschiedlichen Formen. Die Struktur solcher Geschwindigkeitsdiskontinuitäten ist durch Beobachtungen bekannt (Gosling et al., 1978) und könnte als zeitabhängige Randbedingung in das Modell aufgenommen werden. Auch könnten

solche Störungen die Ursache von Diskonnexion als Folge magnetischer Rekonnektion im Schweif sein (Russell et al., 1986). Die Simulation der zeitabhängigen Effekte erfordert ein Gitter, bei dem vor allem der Schweif genügend genau aufgelöst ist. Hier ist ein möglichst großes äquidistantes Gitter anzustreben, das in drei Dimensionen aber sehr viel Speicherplatz und Rechenzeit benötigen kann.

Da in jüngster Zeit eine Vielzahl der beobachteten zeitabhängigen Schweifstrukturen des Kometen Halley 1986 veröffentlicht wurden (Saito, Saito et al., 1987; Saito, Yumoto et al., 1987; Tomita et al., 1987; Liu, 1987; Watanabe et al., 1987; Celnik und Schmidt-Kaler, 1987; Rettig et al., 1987; Lundstedt und Magnusson, 1987; Wu and Qui, 1987; Brosius et al., 1987; Brandt und Niedner, 1987; McFadden et al., 1987), könnten sie durch zeitabhängige Rechnungen erklärt und die Interpretationsansätze quantitativ geprüft werden. Auch bei den in-situ-Messungen am Kometen Halley gibt es noch viele offene Fragen, von denen insbesondere zwei für die Erforschung des Plasmas vorrangig sind. Zum einen wurden zwei unerwartete Diskontinuitäten in der Koma gefunden, von denen die sog. "Kometopause" (d'Uston et al., 1987; Galeev, 1987) besonders interessant ist. Sie befindet sich in einem Abstand von etwa 135000 km vom Kometenkern. Wir hatten sie durch einen Sprung im Magnetfeld des Bildes 5.16 bemerkt und vermutet, daß Giotto dort eine magnetische Diskontinuität des Sonnenwindes durchquert. Eine zeitabhängige Rechnung könnte diese Vermutung prüfen. Eine Erklärung der - besonders bei Halley vorherrschenden - zeitabhängigen Variationen in der Koma durch Störungen im Sonnenwind stellt die höchsten Ansprüche an ein zukünftiges Modell, da hier sowohl eine gute Auflösung der Diskontinuität im Außenbereich, als auch des Stagnationsbereichs notwendig ist. Mit einem solchen Gitter, das wahrscheinlich nur in Form einer zeitabhängigen Verteilung der Stützstellen zu realisieren ist, wäre wahrscheinlich auch die Simulation der Bänder möglich.

Ich danke Herrn Dr. H.U.Schmidt für die Vergabe des Themas der Arbeit und die vielen fruchtbaren Diskussionen, die für die Entwicklung der Dissertation hilfreich waren. Ebenso sei Herrn Dr. R.Wegmann für die Bereitstellung des Neutralgasmodelles des Halleyschen Kometen, sowie zahlreiche wertvolle Ratschläge und Hinweise gedankt. Herrn Prof. Dr. R.Kippenhahn, Direktor des Max-Planck-Instituts für Astrophysik in Garching, sage ich Dank für die Leitung der Arbeit.

Die umfangreichen numerischen Rechnungen wurden auf den Rechenanlagen CRAY-XMP des Rechenzentrums des Instituts für Plasmaphysik in Garching, und CRAY-2 des Rechenzentrums der Universität Stuttgart durchgeführt. Herr Dr. R.Kuhfuß hat dabei freundlicherweise ein sehr effektives Rechenprogramm für den Thomas-Algorithmus zur Verfügung gestellt.

Der Max-Planck-Gesellschaft sei für die finanzielle Unterstützung während der Zeit der Promotion, sowie die Ermöglichung der Teilnahme an mehreren internationalen wissenschaftlichen Tagungen gedankt. Allen Mitgliedern des Max-Planck-Instituts für Physik, Institut für Astrophysik, in Garching bei München danke ich für ihre Anteilnahme.

8. LITERATUR

- Alfvén, H.: 1957, On the theory of comet tails, *Tellus* **9**, 92
- Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H.: 1984, *Computational fluid mechanics and heat transfer*, McGraw-Hill, New York
- Bame, S.J., Anderson, R.C., Asbridge, J.R., Baker, D.N., Feldman, W.C., Fuselier, S.A., Gosling, J.T., McComas, D.J., Thomsen, M.F., Young, D.T., Zwickl, R.D.: 1986, Comet Giacobini-Zinner: Plasma Description, *Science* **232**, 354
- Beam, R.M., Warming, R.F.: 1976, An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form, *J. Comp. Phys.* **22**, 87
- Beam, R.M., Warming, R.F.: 1978, An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes-equations, *AIAA J.* **16** No.4, 393
- Biermann, L.: 1951, Kometenschweife und solare Korpuskularstrahlung, *Zs. f. Astrophys.* **29**, 274
- Biermann, L., Brosowski, B., Schmidt, H.U.: 1967, The interaction of the solar wind with a comet, *Solar Phys.* **1**, 254
- Boice, D.C., Huebner, W.F., Keady, J.J., Schmidt, H.U., Wegmann, R.: 1986, A model of comet P/Giacobini-Zinner, *Geophys. Res. Lett.* **13**, 381
- Book, D.L., Boris, J.P., Hain, K.: 1975, Flux-corrected transport. II. Generalizations of the method, *J. Comp. Phys.* **18**, 248
- Boris, J.P., Book, D.L.: 1973, Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works, *J. Comp. Phys.* **11**, 38
- Brackbill, J.U., Barnes, D.C.: 1980, The effect of nonzero $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations, *J. Comp. Phys.* **35**, 426
- Brandt, J.C.: 1982, Observations and dynamics of plasma tails, in "Comets", Hrsg. L. Wilkening, S.519, Univ. of Arizona Press, Tucson
- Brandt, J.C., Niedner, M.B.: 1987, Plasma structures in comets P/Halley and Giacobini-Zinner, *Astron. Astrophys.* **187**, 281
- Brosius, J.W., Holman, G.D., Niedner, M.B., Brandt, J.C., Slavin, J.A., Smith, E.J., Zwickl, R.D., Bame, S.J.: 1987, The cause of two plasma-tail disconnection events in comet P/Halley during the ICE-Halley radial period, *Astron. Astrophys.* **187**, 267
- Brosowski, B., Wegmann, R.: 1973, Numerische Behandlung eines Kometenmodells, *Meth. Verf. Math. Phys.* **8**, 125
- Celnik, W.E., Schmidt-Kaler, T.: 1987, Structure and dynamics of plasma-tail condensations of comet P/Halley 1986 and inferences on the structure and activity of the cometary nucleus, *Astron. Astrophys.* **187**, 233

Delsemme, A.H.: 1982, Chemical composition of cometary nuclei, in "Comets", Hrsg. L.Wilkening, S.85, Univ. of Arizona Press, Tucson

Dorfi, E.: 1982, 3D models for self-gravitating, rotating magnetic interstellar clouds, *Astron. Astrophys.* **114**, 151

d'Uston, C., Rème, H., Sauvaud, J.A., Cros, A., Anderson, K.A., Carlson, C.W., Curtis, D., Lin, R.P., Korth, A., Richter, A.K., Mendis, A.: 1987, Description of the main boundaries seen by the Giotto electron experiment inside comet P/Halley-solar wind interaction region, *Astron. Astrophys.* **187**, 137

Fedder, J.A., Brecht, S.H., Lyon, J.G.: 1983, MHD simulation of a comet magnetosphere, preprint, *Icarus*

Fernández, J.A., Jockers, K.: 1983, Nature and origin of comets, *Rep. Prog. Phys.* **46**, 665

Galeev, A.A.: 1987, Encounters with comets: discoveries and puzzles in cometary plasma physics, *Astron. Astrophys.* **187**, 12

Galeev, A.A., Cravens, T.E., Gombosi, T.I.: 1985, Solar wind stagnation near comets, *Astrophys. J.* **289**, 807

Giuliani, J.L.jr: 1981, The role of ionization fronts in the colliding wind model of planetary nebulae, *Astrophys. J.* **245**, 903

Gosling, J.T., Asbridge, J.R., Bame, S.J., Feldman, W.C.: 1978, Solar wind stream interfaces, *J. Geoph. Res.* **83** A4, 1401

Gringauz, K.I., Gombosi, T.I., Tatralay, M., Verigin, M.I., Remizov, A.P., Richter, A.K., Apathy, I., Szemerey, I., Dyachkov, A.V., Balakina, O.V., Nagy, A.F.: 1986, Detection of a new "chemical" boundary at comet Halley, *Geophys. Res. Letters* **13**, 613

Gringauz, K.I., Verigin, M.I., Richter, A.K., Gombosi, T.I., Szegő, K., Tatralay, M., Remizov, A.P., Apáthy, I.: 1986, Cometary plasma region in the coma of comet Halley, in: "Exploration of Halley's comet", S.93, ESA SP-250, Vol.I

Haser, L.: 1957, Distribution d'intensité dans la tête d'une comète, *Bull. Acad. Roy. Belgique, Classe de Sciences*, **43**, 740

Hewett, D.W., Nielson, C.W., 1978, A multidimensional quasineutral plasma simulation model, *J. Comp. Phys.* **29**, 219

Huebner, W.F.: 1985, in "Photochemistry of atmospheres", Hrsg. J.S. Levine, Academic Press, New York

Huebner, W.F., Giguere, P.T., Slattery, W.L.: 1982, Photochemical processes in the inner coma, in "Comets", Hrsg. L.Wilkening, S.496, Univ. of Arizona Press, Tucson

Högner, W., Richter, N.: 1969, *Isophometrischer Atlas der Kometen Teil 1*, Barth, Leipzig

Högner, W., Richter, N.: 1979, *Isophometrischer Atlas der Kometen Teil 2*, Barth, Leipzig

Hübner, K.: 1982, *Einführung in die Plasmaphysik*, S.161, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt

Jancel, R., Kahan, Th.: 1966, *Electrodynamics of plasmas*, Wiley, London

Jockers, K.: 1982, The cometary ion tail and its relation to solar wind phenomena, in: "The need for coordinated ground-based observations of Halley's comet", Hrsg. P.Véron, M.Festou, K.Kjär, *Proceedings des ESO Workshops am 29./30. April 1982*, Paris

Jockers, K.: 1985, The ion tail of comet Kohoutek 1973 XII during 17 days of solar wind gusts, *Astron. Astrophys. Suppl.* **62**, 791

Johnstone, A., Coates, A., Kellock, S., Wilken, B., Jockers, K., Rosenbauer, H., Studemann, W., Weiss, W., Formisano, V., Amata, E., Cerulli-Irelli, R., Dobrowolny, M., Terenzi, R., Egidi, A., Borg, H., Hultquist, B., Winningham, J., Gurgiolo, C., Bryant, D., Edwards, T., Feldman, W., Thomsen, M., Wallis, M.K., Biermann, L., Schmidt, H.U., Lüst, R., Haerendel, G., Paschmann, G.: 1986, Ion flow at comet Halley, *Nature* **321**, 344

Hain, K.: 1978, The partial donor cell method, *NRL Memorandum Report* 3713

Krankowsky, D., Lämmerzahl, P., Herrwerth, I., Woweries, J., Eberhardt, P., Dolder, U., Herrmann, U., Schulte, W., Berthelier, J.J., Illiano, J.M., Hodges, R.R., Hoffman, J.H.: 1986, In situ gas and ion measurements at comet Halley, *Nature* **321**, 326

Lepping, R.P., Behannon, K.W.: 1986, Magnetic field directional discontinuities: Characteristics between 0.46 and 1.0 AU, *J. Geoph. Res.* **91** A8, 8725

Liu, Z.L.: 1987, Photographic observations of tail-formation activities of comet P/Halley in November 1985, *Astron. Astrophys.* **187**, 225

Low, B.C.: 1982a, Self similar magnethohydrodynamics: I. The $\gamma = 4/3$ polytrope and the coronal transient, *Astrophys. J.* **254**, 796

Low, B.C.: 1982b, Self similar magnethohydrodynamics: II. The expansion of a stellar envelope into a surrounding vacuum, *Astrophys. J.* **261**, 351

Low, B.C.: 1984, Self similar magnethohydrodynamics: III. The subset of spherically symmetric gasdynamic flows, *Astrophys. J.* **281**, 381

Lundstedt, H., Magnusson, P.: 1987, Two disconnection events in comet P/Halley and possible solar causes, *Astron. Astrophys.* **187**, 261

McComas, D.J., Gosling, J.T., Bame, S.J.: 1987, The Giacobini-Zinner magnetotail: tail configuration and current sheet, *J. Geoph. Res.* **92** No. A2, 1139

Madelung, E.: 1964, *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*, Springer, Berlin

McFadden, L.A., A'Hearn, M.F., Feldman, P.D., Roettger, E.E., Edsall, D.M., Butterworth, P.S.: Activity of comet P/Halley on March 23-25, 1986: IUE observations, *Astron. Astrophys.* **187**, 333

Mukai, T., Miyake, W., Terasawa, T., Kitayama, M., Hirao, K.: 1986, Plasma observation by Suisei of solar-wind interaction with comet Halley, *Nature* **321**, 299

Neubauer, F.M., Glassmeier, K.H., Pohl, M., Raeder, J., Acuna, M.H., Burlaga, L.F., Ness, N.F., Musmann, G., Mariani, F., Wallis, M.K., Ungstrup, E., Schmidt, H.U.: 1986, First results from the Giotto magnetometer experiment at comet Halley, *Nature* **321**, 352

Neugebauer, M., Lazarus, A.J., Altwegg, K., Balsiger, H., Goldstein, B.E., Goldstein, R., Neubauer, F.M., Rosenbauer, H., Schwenn, R., Shelley, E.G., Ungstrup, E.: 1986, The pick-up of cometary protons by the solar wind, in: "Exploration of Halley's comet", S.19, ESA SP-250, Vol.I

Neugebauer, M., Lazarus, A.J., Altwegg, K., Balsiger, H., Goldstein, B.E., Goldstein, R., Neubauer, F.M., Rosenbauer, H., Schwenn, R., Shelley, E.G., Ungstrup, E.: 1987, The pick-up of cometary protons by the solar wind, *Astron Astrophys.* **187**, 21

Mendis, D.A., Houpis, H.L.: 1982, The cometary atmosphere and its interaction with the solar wind, *Rev. Geoph. Sp. Phys.* **20** No.4, 885

Niedner, M.B.: 1979, Interplanetary gas XXIV. Plasma tail disconnections caused by sector boundary crossings or by encounters with high-speed streams?, *Astrophys. J.* **234**, 723

Niedner, M.B., Brandt, J.C.: 1978, Interplanetary gas XXIII. Plasma tail disconnection events in comets: evidence for magnetic field line reconnection at interplanetary sector boundaries?, *Astrophys. J.* **223**, 655

Niedner, M.B., Schwingenschuh, K.: 1986, Plasma-tail activity at the time of the Vega encounters, in: "Exploration of Halley's comet", S.419, ESA SP-250, Vol.III

Niedner, M.B., Schwingenschuh, K.: 1987, Plasma-tail activity at the time of the Vega encounters, *Astron. Astrophys.* **187**, 103

Ogino, T., Walker, R.J., Ashour-Abdalla, M.: 1986, An MHD simulation of the interaction of the solar wind with the outflowing plasma from a comet, *Geoph. Res. Lett.* **13**, 929

Oort, J.H.: 1950, The structure of the cometary cloud surrounding the solar system and a hypothesis concerning its origin, *Bull. Astron. Neth.* **11**, 91

Raeder, J., Neubauer, F.M., Ness, N.F., Burlaga, L.F.: 1987, Macroscopic perturbations of the IMF by P/Halley as seen by the Giotto magnetometer, *Astron. Astrophys.* **187**, 61

Ramshaw, J.D.: 1983, A method for enforcing the solenoidal condition on magnetic field in numerical calculations, *J. Comp. Phys.* **52**, 592

Reinhard, R.: 1986, The Giotto encounter with comet Halley, *Nature* **321**, 313

Rème, H., Sauvaud, J.A., d'Uston, C., Cotin, F., Cros, A., Anderson, K.A., Carlson, C.W., Curtis, D.W., Lin, R.P., Mendis, D.A., Korth, A., Richter, A.K.: 1986, Comet Halley - solar wind interaction from measurements aboard Giotto, *Nature* **21**, 349

Rettig, T.W., Kern, J.R., Ruchti, R., Baumbaugh, B., Baumbaugh, A.E., Knickerbocker, K.L., Dawe, J.: 1987, Observations of the coma of comet P/Halley and the outburst of 1986 March 24-25 (UT), *Astron. Astrophys.* **187**, 249

Richardson, I.G., Cowley, S.W.H., Hynds, R.J., Sanderson, T.R., Wenzel, K.-P., Daly, P.W.: 1986, Three dimensional energetic ion bulk flows at comet P/Giacobini-Zinner, *Geoph. Res. Lett.*, **13**, 1986

Richtmyer, R.D., Morton, K.W.: 1967, Difference methods for initial value problems, *J. Wiley & Sons*, New York

Rosengvinge, T. von, Brandt, J.C., Farquhar, R.W.: 1986, The international cometary explorer mission to comet Giacobini-Zinner, *Science* **232**, 353

Russell, C.T., Saunders, M.A., Phillips, J.L., Fedder, J.A.: 1986, Near-tail reconnection as the cause of cometary tail disconnections, *J. Geoph. Res.* **91** A2, 1417

Saito, T., Saito, K., Aoki, T., Yumoto, K.: 1987, Possible models on disturbances of the plasma tail of comet Halley during the 1985-1986 apparition, *Astron. Astrophys.* **187**, 201

Saito, T., Yumoto, K., Hirao, K., Minami, S., Saito, K., Smith, E.: 1987, Structure and dynamics of the plasma tail of comet P/Halley, I. Knot event on december 31 1985, *Astron. Astrophys.* **187**, 209

Schmidt, H.U., Wegmann, R.: 1980, MHD calculations for cometary plasmas, *Comp. Phys. Comm.* **19**, 309

Schmidt, H.U., Wegmann, R.: 1982, Plasma flow and magnetic fields in comets, in "Comets", Hrsg. L.Wilkening, S.538, Univ. of Arizona Press, Tucson

Schmidt, H.U., Wegmann, R., Neubauer, F.M.: 1986, MHD-model for comet Halley, in: "Exploration of Halley's comet", S.43, ESA SP-250, Vol.I

Schmidt, H.U., Wegmann, R., Huebner, W.F., Boice, D.C.: 1987, Cometary Gas and plasma flow with detailed chemistry, Vordruck MPA 317, Comp. Phys. Comm.

Schmidt-Voigt, M.: 1987, Time-dependent MHD models for the cometary magnetosphere, in: "Diversity and Similarity of Comets", S.127, ESA SP-278

Schmidt-Voigt, M., Köppen, J.: 1987, Influence of stellar evolution on the evolution of planetary nebulae I. Numerical method and hydrodynamical structures, *Astron. Astrophys.* **174**, 211

Schwingschuh, K., Phillips, J.L., Fedder, J.A., Somogyi, A., Yeroshenko, Ye., Riedler, W., Luhmann, J.G., Lichtenegger, H.I.M., Russell, C.T.: 1987, Variability of comet Halley's coma: Vega-1 and Vega-2 magnetic field observations, in: "Diversity and Similarity of Comets", S.63, ESA SP-278

Sedov, L.I.: 1959, Similarity and dimensional methods in mechanics, Infosearch, London

Smith, E.J., Tsurutani, B.T.: 1978, Observations of the interplanetary sector structure up to heliographic latitudes of 16°: Pioneer 11, *J. Geophys. Res.* **83**, 717

Smith, E.J., Bruce, T.T., Slavin, J.A., Jones, D.E., Siscoe, G.L., Mendis, D.A.: 1986, International cometary explorer encounter with Giacobini-Zinner: magnetic field observations, *Science* **232**, 382

Swamy, K.: 1986, Physics of comets, World Scientific Pub., Singapur

Thomas, L.H., 1949, Elliptic problems in linear difference equations over a network, Watson Sci. Comput. Lab. Rept., Columbia University, New York

Tomita, K., Saito, T., Minami, S.: 1987, Structure and dynamics of the plasma tail of comet P/Halley, II. Kink event on January 10-11 1986, *Astron. Astrophys.* **187**, 215

Villasenor, J., Buneman, O.: 1987, Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers, Vordruck J. Comp. Phys.

Warming, R.F., Beam, R.M.: 1975, Proceedings of the AIAA 2nd computational fluid dynamics conference

Watanabe, J., Kawakami, H., Tomita, K., Kinoshita, H., Nakamura, T., Kozai, Y.: 1987, The outburst of comet P/Halley on december 12, 1985, *Astron. Astrophys.* **187**, 229

Wegmann, R.: 1987, The interaction of the solar wind with a comet, in "Physical Processes in Comets, Stars and Active Galaxies", Hrsg. W.Hillebrandt, E.Meyer-Hofmeister und H.C.Thomas, Springer

Wegmann, R., Schmidt, H.U., Huebner, W.F., Boice, D.C.: 1987, Cometary MHD and chemistry, *Astron. Astrophys.* **187**, 339

Weissman, P.R.: 1982, Dynamical history of the Oort cloud, in "Comets", Hrsg. L.Wilkening, S.637, Univ. of Arizona Press, Tucson

Whipple, F.L.: 1950, A comet model. I. The acceleration of Comet Encke, *Astrophys. J.* **111**, 375

Wu, M.C., Qiu, P.Z.: 1987, Activity of the plasma tail of comet P/Halley in March 1986, *Astron. Astrophys.* **187**, 264

Anhang A. Abstand der Bugstoßwelle vom Kometenkern

Dieser Anhang enthält eine Tabelle mit Lösungen der Integralgleichung Gl.(2.4) für den Abstand der Bugstoßwelle vom Kometenkern auf der Linie Sonne-Komet im Falle eines planparallelen Stoßes bei gegebener Gasproduktionsrate G des Kometen. In der ersten Spalte finden wir die kometare Gasproduktionsrate $G[10^{30} \text{ s}^{-1}]$, in der zweiten den Bugstoßwellenabstand $R_B[10^5 \text{ km}]$ und in der dritten den Parameter Π nach Gl.(5.3). In der Lösung der Gl.(2.4) wurde $\sigma = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $m_c = 20 m_p$, $v_c = 1 \text{ km s}^{-1}$, $\rho_\odot = 5 m_p \text{ cm}^{-3}$, $v_\odot = 400 \text{ km s}^{-1}$ und $\gamma = 2$ angenommen. Bei allen Kometen mit $\Pi = \text{const.}$ ist auch das Verhältnis von Bugstoßwellenabstand zu Ionisationslängenskala $R_B \sigma / v_c$ konstant. Um den Bugstoßwellenabstand mit anderen Parametern zu ermitteln, berechne man mit diesen den Parameter Π in Gl.(5.3) und suche in der Tabelle den Bugstoßwellenabstand. Der gesuchte Abstand R'_B ist mit den neuen Parametern σ' und v'_c $R'_B = R_B v'_c [km \text{ s}^{-1}] / \sigma' [10^{-6} \text{ s}^{-1}]$.

G [10^{30} s^{-1}]	R_B [10^5 km]	Π	G [10^{30} s^{-1}]	R_B [10^5 km]	Π
0.0010	0.02351	0.00080	0.0015	0.03504	0.00119
0.0020	0.04646	0.00159	0.0025	0.05776	0.00199
0.0030	0.06895	0.00239	0.0035	0.08004	0.00279
0.0040	0.09104	0.00318	0.0045	0.10194	0.00358
0.0050	0.11275	0.00398	0.0055	0.12348	0.00438
0.0060	0.13412	0.00477	0.0065	0.14469	0.00517
0.0070	0.15518	0.00557	0.0075	0.16560	0.00597
0.0080	0.17595	0.00637	0.0085	0.18623	0.00676
0.0090	0.19645	0.00716	0.0095	0.20658	0.00756
0.010	0.21665	0.00796	0.015	0.31422	0.01194
0.020	0.40668	0.01592	0.025	0.49484	0.01989
0.030	0.57925	0.02387	0.035	0.66047	0.02785
0.040	0.73867	0.03183	0.045	0.81432	0.03581
0.050	0.88763	0.03979	0.055	0.95869	0.04377
0.060	1.02769	0.04775	0.065	1.09496	0.05173
0.070	1.16034	0.05570	0.075	1.22424	0.05968
0.080	1.28662	0.06366	0.085	1.34746	0.06764
0.090	1.40709	0.07162	0.095	1.46540	0.07560
0.10	1.52247	0.07958	0.15	2.03918	0.11937
0.20	2.48123	0.15915	0.25	2.87072	0.19894

0.30	3.22060	0.23873	0.35	3.53946	0.27852
0.40	3.83273	0.31831	0.45	4.10490	0.35810
0.50	4.35874	0.39789	0.55	4.59784	0.43768
0.60	4.82296	0.47746	0.65	5.03690	0.51725
0.70	5.23985	0.55704	0.75	5.43356	0.59683
0.80	5.61868	0.63662	0.85	5.79617	0.67641
0.90	5.96673	0.71620	0.95	6.13065	0.75599
1.0	6.28900	0.79577	1.5	7.62408	1.19366
2.0	8.66263	1.59155	2.5	9.51836	1.98944
3.0	10.2505	2.38732	3.5	10.8898	2.78521
4.0	11.4607	3.18310	4.5	11.9763	3.58099
5.0	12.4464	3.97887	5.5	12.8795	4.37676
6.0	13.2810	4.77465	6.5	13.6554	5.17254
7.0	14.0067	5.57042	7.5	14.3369	5.96831
8.0	14.6485	6.36620	8.5	14.9445	6.76409
9.0	15.2266	7.16197	9.5	15.4954	7.55986
10	15.7516	7.95775	15	17.8437	11.9366
20	19.3938	15.9154	25	20.6323	19.8943
30	21.6664	23.8732	35	22.5552	27.8521
40	23.3353	31.8309	45	24.0315	35.8098
50	24.6621	39.7887	55	25.2359	43.7676
60	25.7638	47.7464	65	26.2528	51.7253
70	26.7082	55.7042	75	27.1363	59.6831
80	27.5382	63.6619	85	27.9153	67.6408
90	28.2749	71.6197	95	28.6163	75.5986
100	28.9385	79.5774	150	31.5473	119.366
200	33.4377	159.154	250	34.9279	198.943
300	36.1576	238.732	350	37.2104	278.521
400	38.1258	318.309	450	38.9427	358.098
500	39.6739	397.887	550	40.3380	437.676
600	40.9517	477.464	650	41.5125	517.253
700	42.0389	557.042	750	42.5252	596.831
800	42.9870	636.619	850	43.4190	676.408
900	43.8247	716.197	950	44.2121	755.985
1000	44.5806	795.774	1500	47.5224	1193.66
2000	49.6304	1591.54	2500	51.2854	1989.43
3000	52.6469	2387.32	3500	53.8019	2785.21
4000	54.8120	3183.09	4500	55.7017	3580.98
5000	56.4983	3978.87	5500	57.2262	4376.76
6000	57.8939	4774.64	6500	58.5050	5172.53
7000	59.0694	5570.42	7500	59.6035	5968.31
8000	60.1002	6366.19	8500	60.5648	6764.08
9000	61.0086	7161.97	9500	61.4249	7559.85

Anhang B. Neutralgasmodell für den Halleyschen Kometen

In diesem Anhang wird das Modell für die Wechselwirkung des Neutralgases mit dem Plasma für das Rendezvous von Giotto mit Halley am 13./14. März 1986 angegeben. Das Modell stammt von Schmidt et al. (1987) und geht von einer sphärisch symmetrischen Verteilung des Neutralgases aus. Die erste Tabelle enthält den Abstand r vom Kometenkern logarithmisch in $[km]$, die Dichte der Neutralteilchen n_n logarithmisch in $[cm^{-3}]$, deren Masse $m_n[m_p]$, Geschwindigkeit $v_n[km\,s^{-1}]$ und Temperatur $T_n[K]$. Dort sind auch die Wirkungsquerschnitte für elastische Stöße $\sigma_{col}[10^{-15}\,cm^2]$ und die Photoionisationsrate $\sigma_{ph}[10^{-6}\,s^{-1}]$ angegeben. In der zweiten Tabelle finden wir die kinetische Überschußenergie $e_{ph}[eV]$ bei Photoionisation, das Ionisationspotential $e_{ei}[eV]$ bei Stoßionisation, die Massen der an Photoionisation, Stoßionisation und Rekombination beteiligten Ionen m_{ph} , m_{ei} und m_{rec} in $[m_p]$, sowie die Koeffizienten $a_{rec}[10^{-6}\,cm^3\,s^{-1}]$ zur Berechnung der Ionisationsrate $a_{rec}\,n_e\,(300\,K/T_e)^{1/2}$.

Tabelle 1:

$\lg(r)$ [km]	$\lg(n_n)$ [cm ⁻³]	m_n [m _p]	v_n [km s ⁻¹]	T_n [K]	σ_{col} [10 ⁻¹⁵ cm ²]	σ_{ph} [10 ⁻⁶ s ⁻¹]
3.193	7.480	19.669	0.879	72.10	3.520	0.521
3.342	7.179	19.470	0.899	87.20	3.490	0.508
3.453	6.937	19.075	0.916	98.40	3.460	0.495
3.530	6.800	19.017	0.930	106.00	3.420	0.488
3.597	6.622	18.687	0.944	112.00	3.400	0.476
3.677	6.507	18.536	0.961	119.00	3.380	0.470
3.774	6.262	18.087	0.985	127.00	3.360	0.451
3.884	6.086	17.869	1.020	135.00	3.320	0.440
3.998	5.835	17.398	1.050	142.00	3.260	0.418
4.114	5.590	16.992	1.100	149.00	3.170	0.397
4.228	5.384	16.612	1.150	152.00	3.020	0.380
4.340	5.097	16.080	1.210	152.00	2.780	0.350
4.456	4.905	15.816	1.290	144.00	2.480	0.337
4.566	4.639	15.252	1.370	129.00	2.080	0.310
4.679	4.422	14.962	1.450	102.00	1.700	0.293
4.799	4.164	14.521	1.500	78.30	1.330	0.269
4.916	3.895	13.995	1.530	56.30	1.030	0.244
5.029	3.716	13.769	1.540	43.90	0.830	0.233
5.143	3.456	13.322	1.550	31.60	0.680	0.215
5.258	3.255	13.056	1.560	23.70	0.574	0.210
5.371	3.029	12.804	1.570	17.40	0.490	0.207
5.486	2.763	12.470	1.570	12.10	0.421	0.210
5.600	2.574	12.347	1.580	9.06	0.365	0.214
5.713	2.332	12.186	1.580	6.43	0.322	0.221
5.828	2.053	11.947	1.580	4.32	0.290	0.227
5.942	1.865	11.790	1.580	3.19	0.271	0.227
6.057	1.612	11.565	1.590	2.20	0.258	0.226
6.170	1.322	11.190	1.590	1.44	0.249	0.222
6.283	1.121	10.985	1.590	1.04	0.242	0.218
6.396	0.823	10.737	1.590	1.00	0.241	0.214

Tabelle 2:

$\lg(r)$ [km]	e_{ph} [eV]	e_{ei} [eV]	m_{ph} [m_p]	m_{ei} [m_p]	m_{rec} [m_p]	a_{rec} [$10^{-6} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$]
3.193	13.6	17.7	20.1	10.8	19.4	0.568
3.342	13.6	17.8	20.0	10.4	19.1	0.501
3.453	13.6	17.8	20.0	9.9	19.1	0.414
3.530	13.6	17.8	19.9	9.8	19.1	0.380
3.597	13.7	17.8	19.9	9.6	19.1	0.347
3.677	13.7	17.8	19.8	9.4	19.2	0.325
3.774	13.7	17.7	19.8	9.4	19.2	0.305
3.884	13.7	17.7	19.8	9.4	19.3	0.310
3.998	13.7	17.5	19.7	9.6	19.5	0.329
4.114	13.7	17.4	19.7	9.9	19.7	0.348
4.228	13.6	17.2	19.6	10.1	19.9	0.360
4.340	13.6	17.0	19.6	10.4	20.1	0.366
4.456	13.6	16.9	19.5	10.4	20.4	0.366
4.566	13.6	16.8	19.5	10.5	20.8	0.362
4.679	13.7	16.8	19.4	10.3	21.1	0.356
4.799	13.8	16.7	19.3	10.4	21.7	0.348
4.916	13.9	16.4	19.1	11.0	22.4	0.337
5.029	14.1	16.2	19.0	11.4	23.0	0.328
5.143	14.5	15.7	18.7	12.9	24.0	0.314
5.258	14.9	15.3	18.4	13.9	24.9	0.302
5.371	15.4	14.7	18.0	15.2	25.9	0.288
5.486	16.0	14.2	17.4	16.4	26.9	0.275
5.600	16.3	14.1	17.1	16.6	27.2	0.269
5.713	16.6	13.9	16.7	16.8	27.4	0.264
5.828	16.8	13.8	16.1	16.7	27.3	0.261
5.942	16.8	13.8	15.9	16.6	27.2	0.260
6.057	16.8	13.8	15.4	16.5	26.8	0.256
6.170	16.8	13.8	14.8	16.2	26.2	0.252
6.283	16.7	13.8	14.5	16.0	25.8	0.247
6.396	16.6	13.8	14.1	15.8	24.5	0.236

Anhang C. Jacobi-Matrizen für das IFMAG-Schema

In diesem Anhang werden wir die Jacobi-Matrizen $\underline{A}_n$ nach Gl. (3.8) mit den Flußvektoren $\vec{F}_n$ aus Gln. (3.3, 3.4, 3.5) und dem Zustandsvektor $\vec{U}$ aus Gl. (3.2) berechnen. Wir verwenden dabei neben den Variablen von $\vec{U}$ auch den magnetischen Druck $p_{mag} = \vec{B}^2/8\pi$. Die Matrixelemente $a_{i,j}^n = \{\underline{A}_n\}_{i,j}$ lauten ohne Berücksichtigung der Gl.(2.17) für den Elektronendruck:

1. Für die Matrix $\underline{A}_1$:

$$a_{1,2} = 1$$

$$a_{1,1} = a_{1,3} = a_{1,4} = a_{1,5} = a_{1,6} = a_{1,7} = a_{1,8} = 0$$

$$a_{2,1} = \frac{\gamma - 3}{2} \left(\frac{q_1}{\rho} \right)^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{q_2^2 + q_3^2}{\rho^2} \right)$$

$$a_{2,2} = (3 - \gamma) \frac{q_1}{\rho} \quad a_{2,3} = (1 - \gamma) \frac{q_2}{\rho} \quad a_{2,4} = (1 - \gamma) \frac{q_3}{\rho}$$

$$a_{2,5} = \gamma - 1$$

$$a_{2,6} = -\frac{\gamma}{4\pi} B_1 \quad a_{2,7} = \frac{2 - \gamma}{4\pi} B_2 \quad a_{2,8} = \frac{2 - \gamma}{4\pi} B_3$$

$$a_{3,1} = -\frac{q_1 q_2}{\rho^2} \quad a_{3,2} = \frac{q_2}{\rho} \quad a_{3,3} = \frac{q_1}{\rho}$$

$$a_{3,6} = -\frac{B_2}{4\pi} \quad a_{3,7} = -\frac{B_1}{4\pi}$$

$$a_{3,4} = a_{3,5} = a_{3,8} = 0$$

$$a_{4,1} = -\frac{q_1 q_2}{\rho^2} \quad a_{4,2} = \frac{q_3}{\rho} \quad a_{4,4} = \frac{q_1}{\rho}$$

$$a_{4,6} = -\frac{B_3}{4\pi} \quad a_{4,8} = -\frac{B_1}{4\pi}$$

$$a_{4,3} = a_{4,5} = a_{4,7} = 0$$

$$a_{5,1} = (\gamma - 1) (\vec{q} \cdot \vec{q}) \frac{q_1}{\rho^3} - [\gamma \epsilon + (2 - \gamma) p_{mag}] \frac{q_1}{\rho^2} + \frac{1}{4\pi} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{B_1}{\rho^2}$$

$$a_{5,2} = \frac{1-\gamma}{2\rho^2} (3q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + [\gamma\epsilon + (2-\gamma)p_{mag}] \frac{1}{\rho} - \frac{1}{4\pi} \frac{B_1^2}{\rho}$$

$$a_{5,3} = (1-\gamma) \frac{q_1 q_2}{\rho^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{B_1 B_2}{\rho}$$

$$a_{5,4} = (1-\gamma) \frac{q_1 q_3}{\rho^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{B_1 B_3}{\rho}$$

$$a_{5,5} = \gamma \frac{q_1}{\rho}$$

$$a_{5,6} = \frac{2-\gamma}{4\pi} \frac{B_1 q_1}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} [q_1 B_1 + (\vec{q} \cdot \vec{B})]$$

$$a_{5,7} = \frac{2-\gamma}{4\pi} \frac{B_2 q_1}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} q_2 B_1$$

$$a_{5,8} = \frac{2-\gamma}{4\pi} \frac{B_3 q_1}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} q_3 B_1$$

$$a_{6,k} = 0 \quad \forall \quad k$$

$$a_{7,1} = -\frac{q_1 B_2 - q_2 B_1}{\rho^2}$$

$$a_{7,2} = \frac{B_2}{\rho} \quad a_{7,3} = -\frac{B_1}{\rho}$$

$$a_{7,6} = -\frac{q_2}{\rho} \quad a_{7,7} = \frac{q_1}{\rho}$$

$$a_{7,4} = a_{7,5} = a_{7,8} = 0$$

$$a_{8,1} = -\frac{q_1 B_3 - q_3 B_1}{\rho^2}$$

$$a_{8,2} = \frac{B_3}{\rho} \quad a_{8,4} = -\frac{B_1}{\rho}$$

$$a_{8,6} = -\frac{q_3}{\rho} \quad a_{8,8} = \frac{q_1}{\rho}$$

$$a_{8,3} = a_{8,5} = a_{8,7} = 0$$

II. Für die Matrix $\underline{A}_2$ gilt:

$$a_{1,3} = 1$$

$$a_{1,1} = a_{1,2} = a_{1,4} = a_{1,5} = a_{1,6} = a_{1,7} = a_{1,8} = 0$$

$$a_{2,1} = -\frac{q_1 q_2}{\rho^2} \quad a_{2,2} = \frac{q_2}{\rho} \quad a_{2,3} = \frac{q_1}{\rho}$$

$$a_{2,6} = -\frac{B_2}{4\pi} \quad a_{2,7} = -\frac{B_1}{4\pi}$$

$$a_{2,4} = a_{2,5} = a_{2,8} = 0$$

$$a_{3,1} = \frac{\gamma - 3}{2} \left(\frac{q_2}{\rho} \right)^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{q_1^2 + q_3^2}{\rho^2} \right)$$

$$a_{3,2} = (1 - \gamma) \frac{q_1}{\rho} \quad a_{3,3} = (3 - \gamma) \frac{q_2}{\rho} \quad a_{3,4} = (1 - \gamma) \frac{q_3}{\rho}$$

$$a_{3,5} = \gamma - 1$$

$$a_{3,6} = \frac{2 - \gamma}{4\pi} B_1 \quad a_{3,7} = -\frac{\gamma}{4\pi} B_2 \quad a_{3,8} = \frac{2 - \gamma}{4\pi} B_3$$

$$a_{4,1} = -\frac{q_2 q_3}{\rho^2} \quad a_{4,3} = \frac{q_3}{\rho} \quad a_{4,4} = \frac{q_2}{\rho}$$

$$a_{4,7} = -\frac{B_3}{4\pi} \quad a_{4,8} = -\frac{B_2}{4\pi}$$

$$a_{4,2} = a_{4,5} = a_{4,6} = 0$$

$$a_{5,1} = (\gamma - 1) (\vec{q} \cdot \vec{q}) \frac{q_2}{\rho^3} - [\gamma \epsilon + (2 - \gamma) p_{mag}] \frac{q_2}{\rho^2} + \frac{1}{4\pi} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{B_2}{\rho^2}$$

$$a_{5,2} = (1 - \gamma) \frac{q_1 q_2}{\rho^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{B_1 B_2}{\rho}$$

$$a_{5,3} = \frac{1 - \gamma}{2 \rho^2} (q_1^2 + 3q_2^2 + q_3^2) + [\gamma \epsilon + (2 - \gamma) p_{mag}] \frac{1}{\rho} - \frac{1}{4\pi} \frac{B_2^2}{\rho}$$

$$a_{5,4} = (1 - \gamma) \frac{q_2 q_3}{\rho^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{B_2 B_3}{\rho}$$

$$a_{5,5} = \gamma \frac{q_2}{\rho}$$

$$a_{5,6} = \frac{2-\gamma}{4\pi} \frac{B_1 q_2}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} q_1 B_2$$

$$a_{5,7} = \frac{2-\gamma}{4\pi} \frac{B_2 q_2}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} [q_2 B_2 + (\vec{q} \cdot \vec{B})]$$

$$a_{5,8} = \frac{2-\gamma}{4\pi} \frac{B_3 q_2}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} q_3 B_2$$

$$a_{6,1} = -\frac{q_2 B_1 - q_1 B_2}{\rho^2}$$

$$a_{6,2} = -\frac{B_2}{\rho} \quad a_{6,3} = \frac{B_1}{\rho}$$

$$a_{6,6} = \frac{q_2}{\rho} \quad a_{6,7} = -\frac{q_1}{\rho}$$

$$a_{6,4} = a_{6,5} = a_{6,8} = 0$$

$$a_{7,k} = 0 \quad \forall \quad k$$

$$a_{8,1} = -\frac{q_2 B_3 - q_3 B_2}{\rho^2}$$

$$a_{8,3} = \frac{B_3}{\rho} \quad a_{8,4} = -\frac{B_2}{\rho}$$

$$a_{8,7} = -\frac{q_3}{\rho} \quad a_{8,8} = \frac{q_2}{\rho}$$

$$a_{8,2} = a_{8,5} = a_{8,6} = 0$$

III. Für die Matrix $\underline{A}_3$ gilt:

$$a_{1,4} = 1$$

$$a_{1,1} = a_{1,2} = a_{1,3} = a_{1,5} = a_{1,6} = a_{1,7} = a_{1,8} = 0$$

$$a_{2,1} = -\frac{q_1 q_3}{\rho^2} \quad a_{2,2} = \frac{q_3}{\rho} \quad a_{2,4} = \frac{q_1}{\rho}$$

$$a_{2,6} = -\frac{B_3}{4\pi} \quad a_{2,8} = -\frac{B_1}{4\pi}$$

$$a_{2,3} = a_{2,5} = a_{2,7} = 0$$

$$a_{3,1} = -\frac{q_2 q_3}{\rho^2} \quad a_{3,3} = \frac{q_3}{\rho} \quad a_{3,4} = \frac{q_2}{\rho}$$

$$a_{3,7} = -\frac{B_3}{4\pi} \quad a_{3,8} = -\frac{B_2}{4\pi}$$

$$a_{3,2} = a_{3,5} = a_{3,6} = 0$$

$$a_{4,1} = \frac{\gamma - 3}{2} \left(\frac{q_3}{\rho} \right)^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{q_1^2 + q_2^2}{\rho^2} \right)$$

$$a_{4,2} = (1 - \gamma) \frac{q_1}{\rho} \quad a_{4,3} = (1 - \gamma) \frac{q_2}{\rho} \quad a_{4,4} = (3 - \gamma) \frac{q_3}{\rho}$$

$$a_{4,5} = \gamma - 1$$

$$a_{4,6} = \frac{2 - \gamma}{4\pi} B_1 \quad a_{4,7} = \frac{2 - \gamma}{4\pi} B_2 \quad a_{4,8} = -\frac{\gamma}{4\pi} B_3$$

$$a_{5,1} = (\gamma - 1) (\vec{q} \cdot \vec{q}) \frac{q_3}{\rho^3} - [\gamma\epsilon + (2 - \gamma)p_{mag}] \frac{q_3}{\rho^2} + \frac{1}{4\pi} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{B_3}{\rho^2}$$

$$a_{5,2} = (1 - \gamma) \frac{q_1 q_3}{\rho^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{B_1 B_3}{\rho}$$

$$a_{5,3} = (1 - \gamma) \frac{q_2 q_3}{\rho^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{B_2 B_3}{\rho}$$

$$a_{5,4} = \frac{1 - \gamma}{2\rho^2} (q_1^2 + q_2^2 + 3q_3^2) + [\gamma\epsilon + (2 - \gamma)p_{mag}] \frac{1}{\rho} - \frac{1}{4\pi} \frac{B_3^2}{\rho}$$

$$a_{5,5} = \gamma \frac{q_3}{\rho}$$

$$a_{5,6} = \frac{2-\gamma}{4\pi} \frac{B_1 q_3}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} q_1 B_3$$

$$a_{5,7} = \frac{2-\gamma}{4\pi} \frac{B_2 q_3}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} q_2 B_3$$

$$a_{5,8} = \frac{2-\gamma}{4\pi} \frac{B_3 q_3}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} [q_3 B_3 + (\vec{q} \cdot \vec{B})]$$

$$a_{6,1} = -\frac{q_3 B_1 - q_1 B_3}{\rho^2}$$

$$a_{6,2} = -\frac{B_3}{\rho} \quad a_{6,4} = \frac{B_1}{\rho}$$

$$a_{6,6} = \frac{q_3}{\rho} \quad a_{6,8} = -\frac{q_1}{\rho}$$

$$a_{6,3} = a_{6,5} = a_{6,7} = 0$$

$$a_{7,1} = -\frac{q_3 B_2 - q_2 B_3}{\rho^2}$$

$$a_{7,3} = -\frac{B_3}{\rho} \quad a_{7,4} = \frac{B_2}{\rho}$$

$$a_{7,7} = \frac{q_3}{\rho} \quad a_{7,8} = -\frac{q_2}{\rho}$$

$$a_{7,2} = a_{7,5} = a_{7,6} = 0$$

$$a_{8,k} = 0 \quad \forall \quad k$$

Berücksichtigen wir zusätzlich die Gl. (2.17) für den Elektronendruck, so erhalten wir Jacobimatrizen der Dimension 9, bei denen die Elemente $a_{i,j}^n$ für $i, j = 1 \dots 8$ nicht geändert werden, da die Elektronentemperatur nur die Quellterme beeinflusst, die wir implizit berücksichtigen. Wir müssen daher nur eine Zeile und Spalte zu den bisher angegebenen Matrizen hinzufügen. Für diese gilt:

$$a_{i,9}^n = 0 \quad \forall \quad i = 1, 8$$

$$a_{\vartheta,1}^n = -\gamma \rho^{-2} p_e q_n$$

$$a_{\vartheta,n+1}^n = \gamma p_e \rho^{-1}$$

$$a_{\vartheta,9}^n = \gamma \rho^{-1} q_n$$

Alle anderen Matrixelemente $a_{\vartheta,j}^n$ verschwinden.

Anhang D. Der Thomas-Algorithmus

Wir wollen hier kurz den Thomas-Algorithmus (Thomas, 1949) in einer Erweiterung von tridiagonaler zu block-tridiagonaler Struktur der Koeffizientenmatrix diskutieren. Den Algorithmus für tridiagonale Gleichungssysteme findet man in allen gängigen Lehrbüchern der numerischen Hydrodynamik, z.B. Anderson et al. (1984). Das Gleichungssystem, das in dem IFMAG-Schema zu lösen ist, hat die folgende, blocktridiagonale Form:

$$\begin{pmatrix} \underline{B}_1 & \underline{C}_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \underline{A}_2 & \underline{B}_2 & \underline{C}_2 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \underline{A}_n & \underline{B}_n & \underline{C}_n & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \underline{A}_{N-1} & \underline{B}_{N-1} & \underline{C}_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \underline{A}_N & \underline{B}_N \end{pmatrix} \vec{U} = \vec{D}. \quad (D.1)$$

$\underline{A}_i, \underline{B}_i, \underline{C}_i$ sind Matrizen der Dimension n . $\vec{U}$ und $\vec{D}$ sind Vektoren der Dimension $N \cdot n$. Wir definieren nun Untervektoren $\vec{u}_i$ und $\vec{d}_i$ der Dimension n , die den Matrizen $\underline{B}_i$ zugeordnet sind. Weiterhin definieren wir Matrizen $\underline{E}_i$ und Vektoren $\vec{f}_i$, für die gilt:

$$\vec{u}_i = \underline{E}_i \vec{u}_{i+1} + \vec{f}_i. \quad (D.2)$$

Mit der zu lösenden linearen Gleichung Gl. (D.1)

$$\underline{A}_i \vec{u}_{i-1} + \underline{B}_i \vec{u}_i + \underline{C}_i \vec{u}_{i+1} = \vec{d}_i, \quad (D.3)$$

können wir durch Elimination von $\vec{u}_i$ und $\vec{u}_{i-1}$ nach $\vec{u}_{i+1}$ auflösen und durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (D.2) $\underline{E}_i$ und $\vec{f}_i$ bestimmen:

$$\underline{E}_i = -(\underline{A}_i \underline{E}_{i-1} + \underline{B}_i)^{-1} \underline{C}_i,$$

$$\vec{f}_i = (\underline{A}_i \underline{E}_{i-1} + \underline{B}_i)^{-1} (\vec{d}_i - \underline{A}_i \vec{f}_{i-1}). \quad (D.4)$$

Wir können also $\underline{E}_i$ und $\vec{f}_i$ rekursiv berechnen. Die Werte für $i = 1$ berechnen wir wieder aus Gl. (D.2) und Gl. (D.3) durch Koeffizientenvergleich:

$$\underline{E}_1 = -\underline{B}_1^{-1} \underline{C}_1,$$

$$\vec{f}_1 = \underline{\mathbb{B}}_1^{-1} \vec{d}_1 . \quad (D.5)$$

Damit können wir alle $\underline{\mathbb{E}}_i$ und $\vec{f}_i$ mit Gl. (D.4) berechnen und anschließend mit Gl. (D.2) $\vec{u}_i$ aus $\vec{u}_{i+1}$ rekursiv bestimmen. Für die Rekursion benötigen wir die Lösung für $\vec{u}_N$, die wir aus Gl. (D.2) und Gl. (D.3) durch Elimination von $\vec{u}_{N-1}$:

$$\vec{u}_N = (\underline{\mathbb{A}}_N \underline{\mathbb{E}}_{N-1} + \underline{\mathbb{B}}_N)^{-1} (\vec{d}_N - \underline{\mathbb{A}}_N \vec{f}_{N-1}) . \quad (D.6)$$

Bei dieser Methode nimmt die Zahl der Rechenoperationen und damit die Rechenzeit linear mit der Zahl der blocktridiagonalen Gleichungssysteme ($= N$) zu.

9. Lebenslauf

Name	Schmidt-Voigt
Vorname	Michael
Geburtsdatum	8. Februar 1959
Geburtsort	Eppstein/Ts
Familienstand	ledig
Eltern	Dr. med. Hans-Georg Schmidt-Voigt und Elisabeth Schmidt-Voigt, geb. Reymann
März 1966 - Juli 1969	Grundschule in Königstein/Ts
August 1969 - Juli 1972	Taunus-Gymnasium in Königstein/Ts
August 1972 - Juni 1978	Bischof-Neumann Schule in Königstein/Ts
Juni 1978	Abitur
Oktober 1978	Beginn des Studiums der Physik an der Ruprecht-Karls-Universität in Heidelberg
Dezember 1980	Vordiplom
Januar 1983 - März 1985	Diplomarbeit am Institut für Theoretische Astrophysik mit dem Thema: Der Einfluß der Zentralsternentwicklung auf die Entwicklung Planetarischer Nebel
Juni 1985	Diplom in Heidelberg
Oktober 1985	Beginn der Doktorarbeit am Max-Planck- Institut für Physik und Astrophysik, Institut für Astrophysik in Garching zum Thema: Zeitabhängige magnetohydrodynamische Modellrechnungen für kometare Plasmen.

